Tensorprodukte von Galoisdarstellungen

1. Einleitung.

Es sei: K ein endlich erzeugter Körper, $G_K = \mathrm{Gal}(K^s/K)$
A/K eine abelsche Varietät über K, $d = \dim(A)$,
$T_\ell(A) = \varprojlim A[\ell^n]$ der Tate-Modul, $\ell \neq \mathrm{char}(K)$,
$V_\ell(A) = T_\ell(A) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$, betrachtet als $\mathbb{Q}_\ell[G_K]$-Modul,
$\rho_{A,\ell} : G_K \to \mathrm{Aut}(T_\ell(A)) \subset \mathrm{Aut}(V_\ell(A)) \simeq \mathrm{GL}_{2d}(\mathbb{Q}_\ell)$,
$\overline{\rho}_{A,\ell} : G_K \to \mathrm{Aut}(A[\ell]) \simeq \mathrm{GL}_{2d}(\mathbb{F}_\ell)$, die zugehörigen Galoisdarstellungen.

Faltings (1983), Tate (1966), Zarhin (1975): Der Homomorphismus

$$\tau_{A,\ell} : \mathrm{End}(A/K) \otimes \mathbb{Q}_\ell \to \mathrm{End}_{\mathbb{Q}_\ell[G_K]}(V_\ell(A))$$

ist ein Isomorphismus. Insbesondere hängt

$$(\rho_{A,\ell}, \rho_{A,\ell}) := \dim_{\mathbb{Q}_\ell} \mathrm{End}_{\mathbb{Q}_\ell[G_K]}(V_\ell(A))$$

nicht von der Wahl von ℓ ab.

Zarhin (1977), (1985); Faltings (1984): Für fast alle ℓ ist

$$\overline{\tau}_{A,\ell} : \mathrm{End}(A/K) \otimes \mathbb{F}_\ell \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}_\ell[G_K]}(A[\ell])$$

ein Isomorphismus. Daher ist

$$(\overline{\rho}_{A,\ell}, \overline{\rho}_{A,\ell}) := \dim_{\mathbb{F}_\ell} \mathrm{End}_{\mathbb{F}_\ell[G_K]}(A[\ell])$$

von ℓ unabhängig, wenn $\ell >> 0$.

Frage 1: Sei B/K eine zweite abelsche Varietät. Gilt entsprechendes für $\rho_{A,B,\ell} := \rho_{A,\ell} \otimes \rho_{B,\ell}$ und für $\overline{\rho}_{A,B,\ell} := \overline{\rho}_{A,\ell} \otimes \overline{\rho}_{B,\ell}$?

Bemerkung: Diese Frage ist mit der Tate-Vermutung eng verwandt. Wie bekannt, besagt die Tate-Vermutung $T^r(X)$ für eine glatte, projective Varietät X/K, daß die Zykel-Abbildung

$$cyc_X^r : \mathfrak{A}^r(X) \otimes \mathbb{Q}_\ell \to (H_{et}^{2r}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)(r))^{G_K}$$

ein Isomorphismus ist, für alle $\ell \neq \mathrm{char}(K)$. Hierbei bezeichnet $\mathfrak{A}^r(X)$ die Gruppe der codimension r Zykel auf X modulo homologischer Äquivalenz.

In der Tat: $T^2(A \times B \times A^* \times B^*) \Rightarrow (\rho_{A,B,\ell}, \rho_{A,B,\ell})$ hängt nicht von ℓ ab.

Frage 2: Wann ist die natürliche Einbettung

$$\tau_{A,B,\ell} : \mathrm{End}(A/K) \otimes \mathrm{End}(B/K) \otimes \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Q}_\ell[G_K]}(\rho_{A,B,\ell})$$

ein Isomorphismus, d.h., wann ist

$$(1) \quad (\rho_{A,B,\ell}, \rho_{A,B,\ell}) = \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{End}^0(A/K) \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{End}^0(B/K)?$$

Ensprechend kann man fragen: wann ist

$$(2) \quad (\overline{\rho}_{A,B,\ell}, \overline{\rho}_{A,B,\ell}) = \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{End}^0(A/K) \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{End}^0(B/K)?$$

Hoffnung/Vermutung: Äquivalent sind:

(i) Die Formel (1) gilt für ein $\ell \neq \mathrm{char}(K)$;

(ii) Die Formel (1) gilt für fast alle $\ell \neq \mathrm{char}(K)$;

(iii) Die Formel (1) gilt für alle $\ell \neq \mathrm{char}(K)$;

(iv) Die Formel (2) gilt für fast alle $\ell \neq \mathrm{char}(K)$;

(v) $\mathrm{Hom}_{K^s}(A, B) = 0$.

2. Resultate.

Satz 1. Die Vermutung gilt, wenn A und B elliptische Kurven über $K = \mathbb{Q}$ sind.

Mithilfe der Resultate von [FJ] = Frey, Jarden, Horizontal isogeny theorems (2002), kann man zeigen:

Satz 2. Es seien A und B elliptische Kurven über K, die keine komplexe Multiplikation haben. Dann gelten die Äquivalenzen:

(ii) Die Formel (1) gilt für fast alle $\ell \neq \mathrm{char}(K)$;

(iv) Die Formel (2) gilt für fast alle $\ell \neq \mathrm{char}(K)$;

(v) $\mathrm{Hom}_{K^s}(A, B) = 0$.

Satz 3. Es seien A und B modulare abelsche Varietäten über $\mathbb{Q}$, d.h., A und B sind isogen zu Produkten von Faktoren A_f einer geeigneten Jacobischen Varietät $J_1(N)$ der Modulkurve $X_1(N)$. Dann gelten die Implikationen:

$$\text{(iv)} \quad \Rightarrow \quad \text{(ii)} \quad \Rightarrow \quad \text{(i)} \quad \Rightarrow \quad \text{(v)}.$$

Das folgende Resultat beinhaltet einen wichtigen Schritt zum Beweis der Folgerung: (v) $\Rightarrow$ (iii). Hierzu sei:

$$\overline{V}_\ell(A) := V_\ell(A) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$$

Satz 4. In der Situation von Satz 3 gelte (v). Sind $V \subset \overline{V}_\ell(A)$ und $W \subset \overline{V}_\ell(B)$ irreduzible $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[G_{\mathbb{Q}}]$-Teilmoduln, so ist auch $V \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} W$ irreduzibel.

Bemerkung. Um (iii) aus (v) zu folgern, wird noch benötigt:

$$V_i \subset \overline{V}_\ell(A), V_1 \otimes W_1 \simeq V_2 \otimes W_2 \Rightarrow V_1 \simeq V_2, W_1 \simeq W_2.$$

3. Abelsche Varietäten vom Typ GL_2 .

Definition: Eine abelsche Varietät A/K hat GL_2-Typ, falls $\mathbb{E} := \mathrm{End}^0(A/K)$ ein Zahlkörper ist vom Grad

$$[\mathbb{E} : \mathbb{Q}] = \dim(A).$$

Bemerkung: Offenbar ist jede solche abelsche Varietät einfach. Falls $\mathrm{char}(K) = 0$, so ist $V_\ell(A)$ ein freier $\mathbb{E} \otimes \mathbb{Q}_\ell$-Modul vom Rang 2, und wir können daher $\rho_{A,\ell}$ als eine Darstellung

$$\rho_{A,\ell} : G_K \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{E} \otimes \mathbb{Q}_\ell)$$

auffassen. Somit ist

$$\rho_{A,\ell} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \oplus_\sigma \rho_{A,\ell,\sigma}, \tag{3}$$

wobei σ über alle Einbettungen $\sigma : \mathbb{E} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ läuft, und $\rho_{A,\ell,\sigma} : G_K \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ eine 2-dimensionale Darstellung ist.

Beispiel: Es sei $f = \sum a_n(f)q^n \in S_2(N, \varepsilon)$ eine normierte Neuform vom Gewicht 2, und sei $A_f/\mathbb{Q}$ der zugehörige Factor der Jacobischen $J_1(N)$ (Shimura Konstruktion). Nach Shimura und Ribet hat A_f GL_2-Typ mit $\mathbb{E} = \mathbb{Q}(\{a_n(f)\})$.

Die zugehörigen GL_2-Darstellungen

$$\rho_{f,\ell,\sigma} := \rho_{A_f,\ell,\sigma} : G_\mathbb{Q} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

werden charakterisiert durch die Formeln

$$\mathrm{tr}(\rho_{f,\ell,\sigma}(\phi_p) = \sigma(a_p(f)), \ \det(\rho_{f,\ell,\sigma}(\phi_p)) = \sigma(\varepsilon(p)p), \ \forall p \nmid N\ell.$$

Hierbei ist $\phi_p \in G_\mathbb{Q}$ ein Frobenius Element bei p.

Bemerkung: Ribet (1992) zeigt, daß aus der Serre Vermutung folgt, daß jede abelsche Varietät $A/\mathbb{Q}$, die GL_2-Typ hat, modular ist. Daher ist jede solche isogen zu einem der A_f.

Satz 5 (Ribet, 1976). (a) Die Darstellungen $\rho_{f,\ell,\sigma}$ sind irreduzibel für alle ℓ, σ.

(b) Falls f (oder A_f) keine komplexe Multiplikation hat, so ist die Restriktion $\rho_{f,\ell,\sigma}|_{G_F}$ irreduzibel für jeden Zahlkörper F.

(c) Falls A_f komplexe Multiplikation bezüglich dem quadratischen Körper F hat (d.h., $A_f \otimes \overline{\mathbb{Q}} \simeq E^d$, wobei $E/\overline{\mathbb{Q}}$ eine elliptische Kurve ist mit $\mathrm{End}^0(\mathbb{E}/\overline{\mathbb{Q}}) = F$), so gilt

$$\rho_{f,\ell,\sigma} = \mathrm{Ind}_{G_F}^{G_\mathbb{Q}}(\chi_{f,\ell,\sigma}),$$

wobei $\chi_{f,\ell,\sigma} : G_F \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ ein stetiger Charakter ist, der von einem Größencharakter von F herkommt.

Bemerkung: Die Zerlegung (3) induziert eine Zerlegung

$$\overline{\rho}_{f,\ell}^{ss} \simeq \oplus_\sigma \overline{\rho}_{f,\ell,\sigma}$$

der Semi-simplifizierung $\overline{\rho}_{f,\ell}^{ss}$ der Darstellung $\overline{\rho}_{f,\ell} = \rho_{A_f,\ell}$; hierbei ist $\overline{\rho}_{f,\ell,\sigma} : G_\mathbb{Q} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$. Man beachte, daß nach Zarhin $\overline{\rho}_{f,\ell}^{ss} \simeq \overline{\rho}_{f,\ell}$ ist, wenn $\ell >> 0$.

Satz 6 (Ribet, 1985, 1992). (a) Für fast alle ℓ ist $\overline{\rho}_{f,\ell,\sigma}$ irreduzibel.

(b) Es sei F ein Zahlkörper. Besitzt f keine komplexe Multiplikation, so ist die Restriktion $\overline{\rho}_{f,\ell,\sigma}|_{G_F}$ irreduzibel, für fast alle ℓ.

4. Modulare GL_2-Darstellungen.

Definition: Es sei $k = \mathbb{F}_{\ell^r}$, wobei $\ell > 5$. Eine Untergruppe $H \leq \mathrm{GL}_2(k)$ heiße streng nicht-auflösbar, falls H nicht auflösbar ist und $\ell \mid |H|$. Eine Darstellung $\rho : G \to \mathrm{GL}_2(k)$ heiße streng nicht-auflösbar, falls ihr Bild $\rho(G)$ diese Eigenschaft hat.

Bemerkung: 1) Aus einem Satz von Dickson folgt: Eine Untergruppe $H \leq \mathrm{GL}_2(k)$ ist streng nicht-auflösbar $\Leftrightarrow H/Z(H) \simeq \mathrm{PSL}_2(\ell^s)$ oder $\simeq \mathrm{PGL}_2(\ell^s)$, für ein $s|r$.

2) Eine streng nicht-auflösbare Darstellung $\rho : G \to \mathrm{GL}_2(k)$ ist absolut irreduzibel.

Satz 7. (a) (Serre, 1972) Ist E/K eine elliptische Kurve ohne CM, so ist $\overline{\rho}_{E,\ell}$ streng nicht-auflösbar, für fast alle ℓ.

(b) Ribet (1985): Besitzt f keine CM, so ist $\overline{\rho}_{f,\ell,\sigma}$ streng nicht-auflösbar, für fast alle ℓ.

Satz 8. Sind $\rho_i : G \to \mathrm{GL}_2(k)$ zwei streng nicht-auflösbare Darstellungen, so ist $\rho_1 \otimes \rho_2$ reduzibel $\Leftrightarrow \rho_1 \simeq \rho_2 \otimes \chi$, für einen Character $\chi : G \to k^\times$.

Bemerkung: Satz 8 beinhaltet eine Verschärfung eines (unveröffentlichten) Satzes von Hamblen-K. (2007).

Satz 9 (Frey/Jarden, 2002). Sind E/K und E'/K elliptische Kurven ohne CM, so ist $\mathrm{Hom}_{K^s}(E, E') \neq 0 \Leftrightarrow$ für unendlich viele ℓ gilt:

$$\overline{\rho}_{E,\ell} \simeq \overline{\rho}_{E',\ell} \otimes \chi_\ell, \quad \text{für ein } \chi_\ell \in \mathrm{Hom}(G_K, \mathbb{F}_\ell^\times).$$

Bemerkung: Satz 7(a) + Satz 8 + Satz 9 $\Rightarrow$ Satz 2.

5. Der Irreduzibilitätssatz.

Bezeichnungen: Es seien $f_i \in S_k(\Gamma_1(N))$ zwei normierte Neuformen der Stufe $N_i|N$ mit Nebentypus ε_i (also $f_i \in S_k(N_i, \varepsilon_i)^{new}$). Ferner sei $\mathbb{E}_i = \mathbb{Q}(\{a_n(f_i)\})$ und $\sigma_i : \mathbb{E}_i \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Ist $k \geq 2$, so hat man (nach Deligne) Darstellungen

$$\rho_{f_i,\ell,\sigma_i} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_\ell),$$

die (mit $f = f_i, \sigma = \sigma_i$) durch die folgende Bedingungen charakterisiert sind:

$$\mathrm{tr}(\rho_{f,\ell,\sigma}(\phi_p)) = \sigma(a_p(f)), \det(\rho_{f,\ell,\sigma}(\phi_p)) = \sigma(\varepsilon(p)p^{k-1}), \forall p \nmid N\ell.$$

Satz 10. (a) Falls f_1 (oder f_2) keine komplexe Multiplikation hat, so ist $\rho_{f_1,\ell,\sigma_1} \otimes \rho_{f_2,\ell,\sigma_2}$ genau dann reduzibel, wenn es einen Dirichlet Charakter χ gibt derart, daß

$$\sigma_1(a_p(f_1)) = \sigma_2(a_p(f_2))\chi(p), \quad \forall p \nmid N\ell. \tag{4}$$

(b) Es habe f_i komplexe Multiplikation bezüglich dem quadratischen Körper F_i, für $i = 1, 2$. Genau dann ist $\rho_{f_1,\ell,\sigma_1} \otimes \rho_{f_2,\ell,\sigma_2}$ reduzibel, wenn $F_1 = F_2$.

Bemerkung: Indem man Satz 10 mit dem folgenden Satz 11 vergleicht, so ergeben sich die Sätze 3 und 4. (Beachte, daß die Folgerung (i) $\Rightarrow$ (v) die einzige nicht-triviale Implikation in Satz 3 ist.)

Satz 11 (Ribet, 1980). Es ist $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{Q}}}(A_{f_1}, A_{f_2}) \neq 0 \Leftrightarrow$ entweder haben beide Formen f_i keine komplexe Multiplikation und es gilt (4) (mit geeigneten σ_i), oder beide haben CM bezüglich demselben Körper $F_1 = F_2$.

6. Die Adjunktierte Darstellung.

Definition: Es sei V ein $k[G]$-Modul und $\rho = \rho_V : G \to \mathrm{GL}(V)$ die zugehörige Darstellung. Der adjuktierte Modul ist $\mathrm{ad}(V) = \mathrm{End}_k(V)$, der durch die Regel

$$(gf)(v) = g(f(g^{-1}v)), \quad \text{für } g \in G, f \in \mathrm{ad}(V), v \in V,$$

zu einem $k[G]$-Modul wird. Die zugehörige Darstellung $\mathrm{ad}(\rho) := \rho_{\mathrm{ad}(V)}$ heißt adjunktierte Darstellung.

Bemerkung: 1) Es sei $\mathrm{ad}^0(V) := \{f \in \mathrm{ad}(V) : \mathrm{tr}(f) = 0\}$. Dann ist $\mathrm{ad}^0(V)$ ein $k[G]$-Teilmodul von $\mathrm{ad}(V)$, und es gilt

$$\mathrm{ad}(V) = \mathrm{ad}^0(V) \oplus k, \quad \text{falls } \dim(V) \in k^\times.$$

2) Man hat die folgenden $k[G]$-Isomorphismen:

$$\mathrm{ad}(V \otimes_k W) \simeq \mathrm{ad}(V) \otimes_k \mathrm{ad}(W), \; \mathrm{ad}(V^*) \simeq \mathrm{ad}(V)^* \simeq \mathrm{ad}(V).$$

3) Es ist $\mathrm{ad}^0(V) \otimes \det_V \simeq \mathrm{Sym}^2(V)$, falls $\dim(V) = 2$.
4) Ist V absolut irreduzibel (d.h., $\dim(\mathrm{End}_k[G](V) = 1)$, so folgt leicht aus den obigen Eigenschaften, daß

$$\mathrm{End}_{k[G]}(V \otimes W) = \mathrm{Hom}_{k[G]}(\mathrm{ad}^0(V), \mathrm{ad}^0(W)) \oplus \mathrm{End}_{k[G]}(W).$$

Daher: Ist auch W absolut irreduzibel, so gilt

$$V \otimes W \text{ ist abs. irreduzibel} \Leftrightarrow \mathrm{Hom}_{k[G]}(\mathrm{ad}^0(V), \mathrm{ad}^0(W)) = 0.$$

5) Falls $\dim(V) = 2$, so gilt nach [DDT] = Darmond, Diamond, Taylor, Fermat's Last Theorem (1995), daß

$$\mathrm{ad}^0(V) \text{ reduzibel ist } \Leftrightarrow V \simeq \mathrm{Ind}_H^G(\chi), \text{ mit } [G:H] = 2.$$

Daher folgt aus Satz 5, dass $\mathrm{ad}^0(\rho_{f,\ell,\sigma})$ genau dann irreduzibel ist, wenn f keine CM hat.

Satz 12 (Ramakrishnan, 2000). Es sei K ein Zahlkörper und seien $\rho_i : G_K \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ zwei ℓ-adische Darstellungen. Dann gilt:

$$(5) \qquad \mathrm{ad}^0(\rho_1) \simeq \mathrm{ad}^0(\rho_2) \quad \Leftrightarrow \quad \rho_1 \simeq \rho_2 \otimes \chi_\ell,$$

für ein $\chi_\ell \in \mathrm{Hom}_{cont}(G_K, \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times)$. In Fall, daß $K = \mathbb{Q}$ ist, so kommt χ_ℓ (unter gewissen Voraussetzungen) von einem Dirichlet-Charakter her.

Bemerkung: Satz 10(a) folgt leicht aus Satz 12, zusammen mit den obigen Bemerkungen. Der Beweis von Satz 10(b) ergibt sich durch ein genaues Studium der zugehörigen induzierten Darstellungen (mithilfe vom Satz von Clifford, Theorie der Größencharaktere, usw.).