Durchschnitte von Humbert Flächen und binäre quadratische Formen

Ernst Kani
Queen's University

Universität Augsburg
6. Mai, 2017

Übersicht

1. Einleitung

- Es sei:

  $M_g/\mathbb{C}$ der Modulraum der Geschlecht g Kurven $/\mathbb{C}$, d.h.
  $M_g(\mathbb{C})$ besteht aus der Menge der Isomorphieklassen solcher Kurven.

1. Einleitung

- Es sei:

  $M_g/\mathbb{C}$ der Modulraum der Geschlecht g Kurven $/\mathbb{C}$, d.h.

  $M_g(\mathbb{C})$ besteht aus der Menge der Isomorphieklassen solcher Kurven.

- Frage: Was kann man über die Dimension und Struktur der Untervarietäten (Unterschemata) von M_g sagen, die durch "spezielle Kurveneigenschaften" definiert sind?

1. Einleitung

- Es sei:

  $M_g/\mathbb{C}$ der Modulraum der Geschlecht g Kurven $/\mathbb{C}$, d.h.

  $M_g(\mathbb{C})$ besteht aus der Menge der Isomorphieklassen solcher Kurven.
- Frage: Was kann man über die Dimension und Struktur der Untervarietäten (Unterschemata) von M_g sagen, die durch "spezielle Kurveneigenschaften" definiert sind?
- Beispiele: 1) Kurven mit speziellen Automorphimen;
  2) Kurven, die einen nicht-konstanten Morphismus zu einer nicht-rationalen Kurve besitzen;
  3) Kurven C, deren Jacobische J_C einen nicht-trivialen Endomorphismus besitzt, d.h. $\mathrm{End}(J_C) \neq \mathbb{Z}$.
- Bemerkung: Beispiel 2 ist ein Spezialfall von Beispiel 3.

1. Einleitung – 2

- Erinnerung: Nach Torelli haben wir eine Einbettung

$$j : M_g(\mathbb{C}) \hookrightarrow A_g(\mathbb{C}),$$

wobei A_g der Modulraum ist, der die Isomorphieklassen der hauptpolarisierten abelschen Varietäten (A, λ) der Dimension g klassifiziert.
Explizit ist: $j(C) := (J_C, \lambda_\theta)$, wobei $\lambda_\theta : J_C \overset{\sim}{\to} \hat{J}_C$ die θ-Polarisierung ist.

Daher kann man Frage/Beispiel 3 auf A_g erweitern.
Für $g = 2$ hat Humbert (1900) diese Frage beantwortet.

1. Einleitung – 3

- Humbert (1900): Ist $n \equiv 0, 1 \pmod 4$ eine positive Zahl, so gibt es eine irreduzible Fläche $H_n \subset A_2$ (genannt eine Humbert Fläche) derart, daß:

  (i) $\mathrm{End}(A) \neq \mathbb{Z} \Leftrightarrow (A, \lambda) \in H_n$, für ein n;

  (ii) $M_2 = A_2 \setminus H_1$;

  (iii) $\exists f : C \to E \Leftrightarrow (J_C, \lambda_\theta) \in H_{N^2}$, für ein $N \geq 2$.

- Bemerkung: Eigenschaft (iii) wurde in [EC] wie folgt verfeinert:

  (iii′) $(J_C, \lambda_\theta) \in H_{N^2} \Leftrightarrow \exists f : C \to E, \deg(f) = N, f$ minimal.

1. Einleitung – 4

- Fragen: 1) Wie kann man die Komponenten des Durchschnitts

$$H_n \cap H_m$$

zweier Humbert Flächen beschreiben bzw. analysieren?
(Von besonderem Interesse: der Fall, daß $n = N^2$.)

1. Einleitung – 4

- Fragen: 1) Wie kann man die Komponenten des Durchschnitts

$$H_n \cap H_m$$

zweier Humbert Flächen beschreiben bzw. analysieren?
(Von besonderem Interesse: der Fall, daß $n = N^2$.)

- N.B.: Der Durchschnitt

$$H_{N^2} \cap H_{m^2} \cap M_2$$

klassifiziert diejenigen Kurven C, die zwei minimale Morphismen $f_1 : C \to E_1$ und $f_2 : C \to E_2$ besitzen, deren Grade N und m sind.

1. Einleitung – 4

- Fragen: 1) Wie kann man die Komponenten des Durchschnitts

$$H_n \ \cap \ H_m$$

zweier Humbert Flächen beschreiben bzw. analysieren?
(Von besonderem Interesse: der Fall, daß $n = N^2$.)

- N.B.: Der Durchschnitt

$$H_{N^2} \cap H_{m^2} \cap M_2$$

klassifiziert diejenigen Kurven C, die zwei minimale Morphismen $f_1 : C \to E_1$ und $f_2 : C \to E_2$ besitzen, deren Grade N und m sind.

- 2) Wie viele Komponenten besitzt $H_n \cap H_m$?

2. Das Grundprinzip

- Grundidee: Wie später genauer erklärt wird, definiert jede ganze positiv-definite quadratische Form q ein abgeschlossenes Unterschema

$$H_g(q) \subset A_g$$

des Modulraums A_g. Solche Unterschema heißen verallgemeinerte Humbert Schemata.

- Im folgenden werden wir nur den Fall $g = 2$ betrachten. In diesem Fall gilt folgendes für $H(q) := H_2(q)$.

2. Das Grundprinzip – 2

- Eigenschaften: 1) $H(q)$ hängt nur von der GL_r-Äquivalenzklasse der quadratischen Form $q = q(x_1, \ldots, x_r)$ ab.

  2) Es gilt immer, daß $H(q) \neq A_2$, aber $H(q)$ könnte leer sein.

  3) Die klassische Humbert Fläche ist $H_n := H(nx^2)$.

  4) Es folgt leicht aus der Definition von $H(q)$ (s. unten), daß für $n \neq m$ gilt

  $$H_n \cap H_m = \bigcup_{q \to n,m} H(q), \tag{1}$$

  Hierbei ist die Vereinigung über alle ganzen positiv-definiten binären quadratischen Formen q, die sowohl n wie auch m primitiv repräsentieren. (Bezeichnung: $q \to n$, $q \to m$.)

  N.B.: Bis auf Äquivalenz gibt es nur endlich viele Formen q mit dieser Eigenschaft, weil $|\mathrm{disc}(q)| \leq 4mn$.

2. Das Grundprinzip – 3

- Fragen: 1) Wann ist $H(q) \neq \emptyset$?

  2) Was ist die (geometrische) Struktur von $H(q)$? Ist $H(q)$ irreduzibel?

  3) Für eine gegebene Form q, wie kann man die hauptpolarisierten abelschen Flächen (A, λ) in $H(q)$ konstruieren? Gibt es eine "modulare Konstruktion"?

3. Hauptresultate I

- Bezeichnung: Es bezeichne $q = [a, b, c]$ die binäre quadratische Form

  $$q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2.$$

  Ferner sei Q die Menge der ganzen binären quadratischen Formen q mit:

  (i) q ist positiv-definit;

  (ii) $q(x, y) \equiv 0, 1 \pmod 4$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$.

  Ferner, für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne

  $$Q(n) = \{q \in Q : q \to n\}$$

  die Menge der Formen $q \in Q$, die n *primitiv repräsentieren,* d.h.,

  $$q(x, y) = n, \quad \text{für geeignete } x, y \in \mathbb{Z} \text{ mit } \mathrm{ggT}(x, y) = 1.$$

3. Hauptresultate - 2

- Satz 1: Es sei q eine ganze binäre quadratische Form und sei $N \geq 1$. Dann gilt:

$$H(q) \neq \emptyset \text{ und } H(q) \subset H_{N^2} \quad \Leftrightarrow \quad q \in Q(N^2).$$

3. Hauptresultate - 2

- Satz 1: Es sei q eine ganze binäre quadratische Form und sei $N \geq 1$. Dann gilt:

$$H(q) \neq \emptyset \ \text{ und } \ H(q) \subset H_{N^2} \quad \Leftrightarrow \quad q \in Q(N^2).$$

- Korollar: Ist $m \equiv 0, 1 \pmod 4$ und $N \geq 1$, so ist

$$H_m \cap H_{N^2} \ \neq \ \emptyset.$$

Ferner, ist $m > 1$ und $N > 1$, so gilt

$$H_m \cap H_{N^2} \cap M_2 \ \neq \ \emptyset.$$

3. Hauptresultate - 2

- Satz 1: Es sei q eine ganze binäre quadratische Form und sei $N \geq 1$. Dann gilt:

$$H(q) \neq \emptyset \text{ und } H(q) \subset H_{N^2} \quad \Leftrightarrow \quad q \in Q(N^2).$$

- Korollar: Ist $m \equiv 0, 1 \pmod 4$ und $N \geq 1$, so ist

$$H_m \cap H_{N^2} \neq \emptyset.$$

  Ferner, ist $m > 1$ und $N > 1$, so gilt

$$H_m \cap H_{N^2} \cap M_2 \neq \emptyset.$$

- Beweis. OE $m > 1$. Betrachte $q = [N^2, 2\varepsilon N, m]$, wobei $\varepsilon = \mathrm{Rest}(m, 4)$. Nach Theorem 1 ist $H(q) \neq \emptyset$, da $q \in Q(N^2)$. Ferner, da $q \to N^2$ und $q \to m$, so gilt wegen (1), daß $H(q) \subset H_m \cap H_{N^2}$.

3. Hauptresultate I - 3

- Bemerkung. Der 2. Teil des Korollars zeigt, daß der Modulraum
$$M_2(1,n) = \bigcup_{1<N|n} H_{N^2} \cap M_2$$
zusammenhängend ist.

  Das beantwortet eine Frage von Accola-Previato[AP] (2006).

3. Hauptresultate I - 3

- Bemerkung. Der 2. Teil des Korollars zeigt, daß der Modulraum
$$M_2(1,n) = \bigcup_{1<N|n} H_{N^2} \cap M_2$$
zusammenhängend ist.

  Das beantwortet eine Frage von Accola-Previato[AP] (2006).
- N.B.: Aus (iii') folgt, daß der Modulraum $M_2(1,n)$ diejenigen Isomorphieklassen von Kurven C klassifiziert, die einen Morphismus $f : C \to E$ vom Grad n zu einer elliptischen Kurve E besitzen.
  Dieser Raum wurde von Lange[La] (1976) untersucht.

4. Hauptresultate II

- Frage: Wann ist $H(q)$ irreduzibel?

4. Hauptresultate II

- Frage: Wann ist $H(q)$ irreduzibel?
- Satz 2: Ist $q = [a, b, c] \in Q(N^2)$ primitiv, d.h.., ist $\mathrm{ggT}(a, b, c) = 1$, so ist $H(q)$ eine irreduzible Kurve.

4. Hauptresultate II

- Frage: Wann ist $H(q)$ irreduzibel?
- Satz 2: Ist $q = [a, b, c] \in Q(N^2)$ primitiv, d.h.., ist $\mathrm{ggT}(a, b, c) = 1$, so ist $H(q)$ eine irreduzible Kurve.
- Definition. Eine quadratische Form q heiße *vom Typ* (N, m, d) falls $q \in Q(N^2)$ und falls $m|N$ und

$$disc(q) = -16m^2 d \quad \text{und} \quad \mathrm{ggT}(d, N/m) = 1.$$

4. Hauptresultate II

- Frage: Wann ist $H(q)$ irreduzibel?
- Satz 2: Ist $q = [a, b, c] \in Q(N^2)$ primitiv, d.h.., ist $\mathrm{ggT}(a, b, c) = 1$, so ist $H(q)$ eine irreduzible Kurve.
- Definition. Eine quadratische Form q heiße *vom Typ* (N, m, d) falls $q \in Q(N^2)$ und falls $m|N$ und

$$disc(q) = -16m^2 d \quad \text{und} \quad \mathrm{ggT}(d, N/m) = 1.$$

- Lemma 1: Ist $q \in Q(N^2)$, so gibt es eindeutige positive ganze Zahlen $m|N$ und d derart, daß q den Typ (N, m, d) besitzt.

4. Hauptresultate II - 2

- Satz 3: Ist $q = [a, b, c] \in Q(N^2)$ vom Typ (N, m, d), so sei

$$c_m(q) \ = \ \mathrm{ggT}(a, b, c, m).$$

(a) $H(q)$ hat höchstens $2^{\omega(c_m(q))}$ irreduzible Komponenten, falls $8 \nmid c_m(q)$. Hierbei ist $\omega(n) := |\{p|n\}|$.

(b) Ist $d > N^4/(4m^2)$ und ist $c_m(q)$ ungerade, so besitzt $H(q)$ genau $2^{\omega(c_m(q))}$ irreduzible Komponenten, außer wenn $q \sim [N^2, 0, 4d]$.

4. Hauptresultate II - 2

- Satz 3: Ist $q = [a, b, c] \in Q(N^2)$ vom Typ (N, m, d), so sei

$$c_m(q) \; = \; \mathrm{ggT}(a, b, c, m).$$

(a) $H(q)$ hat höchstens $2^{\omega(c_m(q))}$ irreduzible Komponenten, falls $8 \nmid c_m(q)$. Hierbei ist $\omega(n) := |\{p|n\}|$.

(b) Ist $d > N^4/(4m^2)$ und ist $c_m(q)$ ungerade, so besitzt $H(q)$ genau $2^{\omega(c_m(q))}$ irreduzible Komponenten, außer wenn $q \sim [N^2, 0, 4d]$.

- Bemerkungen: 1) Ist $c_m(q) = 1$, so folgt aus Theorem 3(a), daß $H(q)$ irreduzibel ist. Daher: Theorem 3(a) $\Rightarrow$ Theorem 2.

  2) Falls $8 | c_m(q)$, so hat $H(q)$ höchstens $2^{\omega(c_m(q))+1}$ irreduzible Komponenten, und es gilt ein ähnliches Resultat wie in Teil (b) (aber mit mehr Ausnahmen). Außerdem kann man auch in den Ausnahmefällen die Anzahl der Komponenten bestimmen.

4. Hauptresultate II - 4

- Numerische Beispiele: Mithilfe der Reduktiontheorie der binären quadratischen Formen und der obigen Resultate (und andere), erhält man:

$$\begin{aligned} H_1 \cap H_4 &= H[1,0,4], \\ H_1 \cap H_5 &= H[1,0,4], \\ H_4 \cap H_5 &= H[1,0,4] \cup H[4,0,5] \cup H[4,4,5], \\ H_9 \cap H_5 &= H[4,0,5] \cup H[5,2,9] \cup H[5,4,8]. \end{aligned}$$

Die Anzahl der irreduziblen Komponenten von $H_{N^2} \cap H_m$ ist:

$N^2 \backslash m$	1	4	5	8	9	12	13	16	17	20	21	24	25
1	$*$	1	1	2	1	2	2	2	3	3	2	3	3
4	1	$*$	3	4	3	4	5	5	5	6	5	6	6
9	1	3	3	5	$*$	6	5	6	8	7	8	10	9
16	2	5	5	6	6	9	9	$*$	9	12	10	11	12
25	3	6	7	8	9	9	10	12	15	16	11	13	$*$

N.B.: Enthält der Durchschnitt $H_{N^2} \cap H_m$ ein reduzibles $H(q)$, so ist die Komponentenanzahl in rot angegeben.

5. Die verfeinerte Humbert Invariante

- Grundidee: Die Néron-Severi Gruppe

$$\mathrm{NS}(A) = \mathrm{Div}(A)/\equiv$$

einer hauptpolarisierten abelschen Varietät (A, λ) besitzt eine kanonische ganze quadratische Form $q_{(A,\lambda)}$ (genannt die verfeinerte Humbert Invariante).

5. Die verfeinerte Humbert Invariante

- Grundidee: Die Néron-Severi Gruppe

$$\mathrm{NS}(A) \;=\; \mathrm{Div}(A)/\equiv$$

einer hauptpolarisierten abelschen Varietät (A, λ) besitzt eine kanonische ganze quadratische Form $q_{(A,\lambda)}$ (genannt die verfeinerte Humbert Invariante).

- Bezeichnung: Es sei A/K eine abelsche Fläche über einem algebraisch abgeschlossenem Körper K. Ist $\lambda : A \to \hat{A}$ eine Hauptpolarisierung, so ist $\lambda = \phi_\theta$, für ein $\theta \in \mathrm{NS}(A)$. Setze

$$\tilde{q}_{(A,\lambda)}(D) = (D.\theta)^2 - 2(D.D), \quad \forall D \in \mathrm{NS}(A).$$

Nach dem Hodge Index Satz definiert $\tilde{q}_{(A,\lambda)}$ eine positiv-definite quadratische Form $q_{(A,\lambda)}$ auf der Quotientengruppe

$$\mathrm{NS}(A, \lambda) \;:=\; \mathrm{NS}(A)/\mathbb{Z}\theta.$$

5. Die verfeinerte Humbert Invariante - 2

- Definition: Die quadratische Form $q_{(A,\lambda)}$ heißt die verfeinerte Humbert Invariante von (A, λ).
- Bemerkung: Ist $\bar{D} \in \mathrm{NS}(A, \lambda)$ primitiv, d.h., ist $\mathrm{NS}(A, \lambda)/\mathbb{Z}\bar{D}$ torsionfree, so gilt (vgl. [EC] (1994)), daß

$$N = q_{(A,\lambda)}(\bar{D})$$

die klassische Humbert Invariante von A ist, die Humbert im Fall $K = \mathbb{C}$ via der Periodenmatrix von A definiert hat.

N.B.: Ist $\mathrm{rank}(\mathrm{NS}(A)) > 2$, so besitzt (A, λ) unendlich viele verschiedene (klassische) Humbert Invarianten N.

6. Verallgemeinerte Humbert Schemata

- Prinzip: Man kann die verfeinerte Humbert Invariante $q_{(A,\lambda)}$ dazu benützen, um abgeschlossene Unterschemata $H_g(q)$ des Modulraums A_g zu definieren. (Hier $g = 2$.)

6. Verallgemeinerte Humbert Schemata

- Prinzip: Man kann die verfeinerte Humbert Invariante $q_{(A,\lambda)}$ dazu benützen, um abgeschlossene Unterschemata $H_g(q)$ des Modulraums A_g zu definieren. (Hier $g = 2$.)
- Definition: Es seien (M_1, q_1) und (M_2, q_2) zwei quadratische $\mathbb{Z}$-Moduln. Dann *repräsentiert* (M_1, q_1) den Modul (M_2, q_2) *primitiv,* falls es eine Injektion $f : M_2 \to M_1$ gibt derart, daß

$$q_1 \circ f = q_2 \quad \text{und} \quad M_1/f(M_2) \text{ torsionfrei ist.}$$

  Ist dies der Fall, so schreibt man $q_1 \to q_2$.

6. Verallgemeinerte Humbert Schemata

- Prinzip: Man kann die verfeinerte Humbert Invariante $q_{(A,\lambda)}$ dazu benützen, um abgeschlossene Unterschemata $H_g(q)$ des Modulraums A_g zu definieren. (Hier $g = 2$.)
- Definition: Es seien (M_1, q_1) und (M_2, q_2) zwei quadratische $\mathbb{Z}$-Moduln. Dann *repräsentiert* (M_1, q_1) den Modul (M_2, q_2) *primitiv,* falls es eine Injektion $f : M_2 \to M_1$ gibt derart, daß

  $$q_1 \circ f = q_2 \quad \text{und} \quad M_1/f(M_2) \text{ torsionfrei ist.}$$

  Ist dies der Fall, so schreibt man $q_1 \to q_2$.
- N.B.: Ist $n \in \mathbb{Z}$, so gilt $q_1 \to n$ (im Sinne von §2) genau dann, wenn $q_1 \to q_2 := nx^2$.

6. Verallgemeinerte Humbert Schemata

- Prinzip: Man kann die verfeinerte Humbert Invariante $q_{(A,\lambda)}$ dazu benützen, um abgeschlossene Unterschemata $H_g(q)$ des Modulraums A_g zu definieren. (Hier $g = 2$.)
- Definition: Es seien (M_1, q_1) und (M_2, q_2) zwei quadratische $\mathbb{Z}$-Moduln. Dann *repräsentiert* (M_1, q_1) den Modul (M_2, q_2) *primitiv,* falls es eine Injektion $f : M_2 \to M_1$ gibt derart, daß

$$q_1 \circ f = q_2 \quad \text{und} \quad M_1/f(M_2) \text{ torsionfrei ist.}$$

  Ist dies der Fall, so schreibt man $q_1 \to q_2$.
- N.B.: Ist $n \in \mathbb{Z}$, so gilt $q_1 \to n$ (im Sinne von §2) genau dann, wenn $q_1 \to q_2 := nx^2$.
- Bezeichnung: Ist q eine ganze, positiv-definite quadratische Form (auf $\mathbb{Z}^r$), so sei

$$H(q) := \{(A, \lambda) \in A_2(\overline{K}) : q_{(A,\lambda)} \to q\}.$$

6. Verallgemeinerte Humbert Schemata - 2

- Proposition 1: $H(q)$ ist eine abgeschlossene Untermenge von A_2, vorausgesetzt, daß $\mathrm{char}(K)^2 \nmid \mathrm{disc}(q)$.

6. Verallgemeinerte Humbert Schemata - 2

- Proposition 1: $H(q)$ ist eine abgeschlossene Untermenge von A_2, vorausgesetzt, daß $\mathrm{char}(K)^2 \nmid \mathrm{disc}(q)$.
- Beispiel: Wie schon erwähnt, ist die klassische Humbert Fläche durch $H_n = H_2(nx^2)$ definiert (wenn $K = \mathbb{C}$).

6. Verallgemeinerte Humbert Schemata - 2

- Proposition 1: $H(q)$ ist eine abgeschlossene Untermenge von A_2, vorausgesetzt, daß $\mathrm{char}(K)^2 \nmid \mathrm{disc}(q)$.
- Beispiel: Wie schon erwähnt, ist die klassische Humbert Fläche durch $H_n = H_2(nx^2)$ definiert (wenn $K = \mathbb{C}$).
- Bemerkung: Man kann die Definition der verfeinerten Humbert Invariante auf hauptpolarisierte abelsche Varietäten (A, λ) beliebiger Dimension $g \geq 2$ verallgemeinern. Dann liefert die obige Definition von $H(q)$ abgeschlossene Unterschemata von A_g.

7. Die modulare Konstruktion: 1. Schritt

- **Schritt 1: Die Grundkonstruktion ([FK])**
- Satz 4: Es sei $\mathrm{char}(K) \nmid N \geq 1$, und sei $X(N)/K$ die affine Modulkurve der Stufe N. Dann gibt es einen endlichen surjektiven Morphismus

  $$\beta_N : X(N) \times X(N) \;\to\; H_{N^2}.$$

  Ferner ist die Normalisierung $\tilde{H}_{N^2}$ von H_{N^2} isomorph zu der Quotientenfläche $(X(N) \times X(N)) / \mathrm{Aut}(\beta_N)$.

7. Die modulare Konstruktion: 1. Schritt

- **Schritt 1: Die Grundkonstruktion ([FK])**
- Satz 4: Es sei $\mathrm{char}(K) \nmid N \geq 1$, und sei $X(N)/K$ die affine Modulkurve der Stufe N. Dann gibt es einen endlichen surjektiven Morphismus

$$\beta_N : X(N) \times X(N) \;\to\; H_{N^2}.$$

  Ferner ist die Normalisierung $\tilde{H}_{N^2}$ von H_{N^2} isomorph zu der Quotientenfläche $(X(N) \times X(N))/\operatorname{Aut}(\beta_N)$.
- Bemerkung: 1) Der Morphism β_N ist eine Variante der Grundkonstruktion ("basic construction") von [FK].
  2) Es ist $\deg(\beta_N) = |\operatorname{Aut}(\beta_N)|$ und

$$\operatorname{Aut}(\beta_N) \;\simeq\; \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})/\{\pm 1\} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

  Insbesondere ist $|\operatorname{Aut}(\beta_N)| = |\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})|$, falls $N \geq 3$.

7. Die modulare Konstruktion: 2. Schritt

- **Schritt 2: Die Modularkorrespondenzen X_A^N**
- Bezeichnung: Ist $d \geq 1$, so bezeichne $\mathcal{M}_d$ die Menge der primitiven 2×2 Matrizen der Determinante d. Es ist also

$$\mathcal{M}_d = \Gamma(1)\alpha_d\Gamma(1), \quad \text{mit } \Gamma(1) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \alpha_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

7. Die modulare Konstruktion: 2. Schritt

- **Schritt 2: Die Modularkorrespondenzen X_A^N**
- Bezeichnung: Ist $d \geq 1$, so bezeichne $\mathcal{M}_d$ die Menge der primitiven 2×2 Matrizen der Determinante d. Es ist also

$$\mathcal{M}_d = \Gamma(1)\alpha_d\Gamma(1), \quad \text{mit } \Gamma(1) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \alpha_d = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right).$$

- Resultat (Klein): Ist $K = \mathbb{C}$, so gibt es zu jedem $A \in \mathcal{M}_d$ eine irreduzible Kurve

$$X_A^N \subset X(N) \times X(N),$$

die nur von der Doppelnebenklasse $\pm\Gamma(N)A\Gamma(N)$ abhängt.

7. Die modulare Konstruktion: 2. Schritt

- **Schritt 2: Die Modularkorrespondenzen X_A^N**
- Bezeichnung: Ist $d \geq 1$, so bezeichne $\mathcal{M}_d$ die Menge der primitiven 2×2 Matrizen der Determinante d. Es ist also

$$\mathcal{M}_d = \Gamma(1)\alpha_d\Gamma(1), \quad \text{mit } \Gamma(1) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \alpha_d = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right).$$

- Resultat (Klein): Ist $K = \mathbb{C}$, so gibt es zu jedem $A \in \mathcal{M}_d$ eine irreduzible Kurve

$$X_A^N \subset X(N) \times X(N),$$

die nur von der Doppelnebenklasse $\pm\Gamma(N)A\Gamma(N)$ abhängt.

- Bemerkung: Analytisch gesehen ist $X(N) = \Gamma(N)\backslash\mathfrak{H}$, und X_A^N ist das Bild des Graphen $\Gamma_A \subset \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ von A (betrachtet als Moebiustransformation auf der oberen Halbebene $\mathfrak{H}$).

7. Die modulare Konstruktion: 3. Schritt

- **Schritt 3: Die Structur von $H(q)$**
- Bezeichnung: Ist $A \in \mathcal{M}_d$ und $N \geq 1$, so sei

$$q_A^N = [N^2, 2mt, m^2(t^2+4d)/N^2].$$

Hierbei ist $t = \mathrm{Spur}(BA)$, wobei $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ und die Zahl $m|N$ durch folgende Formel gegeben wird:

$$\frac{N}{m} = \mathrm{ggT}(x-w, y, z, N), \quad \text{falls } BA = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right).$$

7. Die modulare Konstruktion: 3. Schritt

- **Schritt 3: Die Structur von $H(q)$**
- Bezeichnung: Ist $A \in \mathcal{M}_d$ und $N \geq 1$, so sei

$$q_A^N = [N^2, 2mt, m^2(t^2 + 4d)/N^2].$$

Hierbei ist $t = \mathrm{Spur}(BA)$, wobei $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ und die Zahl $m|N$ durch folgende Formel gegeben wird:

$$\frac{N}{m} = \mathrm{ggT}(x - w, y, z, N), \quad \text{falls } BA = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right).$$

- Lemma 2: (a) q_A^N ist eine Form vom Typ (N, m, d).

  (b) Ist q eine Form vom Typ (N, m, d), so gibt es eine (primitive) Matrix $A \in \mathcal{M}_d$ derart, daß $q \sim q_A^N$.

7. Die modulare Konstruktion: 3. Schritt - 2

- Bezeichnung: Ist $A \in \mathcal{M}_d$ und $N \geq 1$, so bezeichne

$$\overline{X}_A^N := \beta_N(X_A^N) \subset H_{N^2} \subset A_2$$

das Bild der Modularkorrespondenz X_A^N auf der Humbertfläche H_{N^2}.

7. Die modulare Konstruktion: 3. Schritt - 2

- Bezeichnung: Ist $A \in \mathcal{M}_d$ und $N \geq 1$, so bezeichne

$$\overline{X}_A^N := \beta_N(X_A^N) \subset H_{N^2} \subset A_2$$

das Bild der Modularkorrespondenz X_A^N auf der Humbertfläche H_{N^2}.

- Satz 5: Ist q eine binäre Form vom Typ (N, m, d), so gilt

$$H(q) = \bigcup_A \overline{X}_A^N, \tag{2}$$

wobei die Vereinigung über alle $A \in \mathcal{M}_d$ läuft mit $q_A^N \sim q$. Diese Vereinigung ist endlich, weil folgendes gilt:

$$gBA_1g^{-1} \equiv \pm BA_2 \,(\mathrm{mod}\, N),\, g \in \Gamma(1) \;\Rightarrow\; \overline{X}_{A_1}^N = \overline{X}_{A_2}^N. \tag{3}$$

8. Die Struktur von H(q)

- **Structuranalyse von $H(q)$**
- Vorbemerkung: Wegen Satz 5 führt das Studium der irreduziblen Komponenten von $H(q)$ zu den folgenden 3 Aufgaben:
  1. Bestimme die $SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$-Konjugiertenklassen der Matrizen $A \bmod N$.
  2. Studiere die $\pm$-Wirkung auf den Konjugiertenklassen.
  3. Untersuche die Umkehrung der Implikation (3).

8. Die Struktur von H(q)

- **Structuranalyse von $H(q)$**
- Vorbemerkung: Wegen Satz 5 führt das Studium der irreduziblen Komponenten von $H(q)$ zu den folgenden 3 Aufgaben:
  1. Bestimme die $SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$-Konjugiertenklassen der Matrizen A mod N.
  2. Studiere die $\pm$-Wirkung auf den Konjugiertenklassen.
  3. Untersuche die Umkehrung der Implikation (3).
- Lösungen: 1) ist eine einfache Erweiterung der Resultate von Nobs[No] (1977).

  2) ist eine Übungsaufgabe und führt zu den Ausnahmen, die im Satz 3 auftreten.

  3) ist schwieriger. Wenn die Umkehrung nicht gilt, so liegen die Kurven im singulären Ort von H_{N^2}. Es gilt aber:

8. Die Structur von H(q) - 2

- Satz 6: Ist q eine Form vom Typ (N, m, d), die die Bedingung

  (4) $$|\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : q(x,y) = N^2, \mathrm{ggT}(x,y) = 1\}| = 2$$

  erfüllt, so gilt die Umkehrung von (3) für die Matrizen $A_i \in \mathcal{M}_d$ mit $q_{A_i}^N \sim q$.

8. Die Structur von H(q) - 2

- Satz 6: Ist q eine Form vom Typ (N, m, d), die die Bedingung

  (4) $$|\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : q(x,y) = N^2, \mathrm{ggT}(x,y) = 1\}| = 2$$

  erfüllt, so gilt die Umkehrung von (3) für die Matrizen $A_i \in \mathcal{M}_d$ mit $q^N_{A_i} \sim q$.
- Bemerkung: Ist $d > N^4/(4m^2)$, so zeigt die Theorie der quadratischen Formen (Reduktionstheorie), daß q die Bedingung (4) erfüllt. ($\Rightarrow$ Theorem 3(b).)

8. Die Structur von H(q) - 2

- Satz 6: Ist q eine Form vom Typ (N, m, d), die die Bedingung

  (4) $$|\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : q(x,y) = N^2, \mathrm{ggT}(x,y) = 1\}| = 2$$

  erfüllt, so gilt die Umkehrung von (3) für die Matrizen $A_i \in \mathcal{M}_d$ mit $q^N_{A_i} \sim q$.
- Bemerkung: Ist $d > N^4/(4m^2)$, so zeigt die Theorie der quadratischen Formen (Reduktionstheorie), daß q die Bedingung (4) erfüllt. ($\Rightarrow$ Theorem 3(b).)
- Theorem 7: Ist $N > 2$ eine Primzahl und q eine Form vom Typ (N, N, d), für die (4) nicht gilt, so gilt die Umkehrung von (3) genau dann, wenn $N \equiv 1 \mod 4$.

8. Die Structur von H(q) - 2

- Satz 6: Ist q eine Form vom Typ (N, m, d), die die Bedingung

  (4) $\quad |\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : q(x, y) = N^2, \mathrm{ggT}(x, y) = 1\}| = 2$

  erfüllt, so gilt die Umkehrung von (3) für die Matrizen $A_i \in \mathcal{M}_d$ mit $q^N_{A_i} \sim q$.
- Bemerkung: Ist $d > N^4/(4m^2)$, so zeigt die Theorie der quadratischen Formen (Reduktionstheorie), daß q die Bedingung (4) erfüllt. ($\Rightarrow$ Theorem 3(b).)
- Theorem 7: Ist $N > 2$ eine Primzahl und q eine Form vom Typ (N, N, d), für die (4) nicht gilt, so gilt die Umkehrung von (3) genau dann, wenn $N \equiv 1 \mod 4$.
- Beispiel: Die Form $q = [9, 6, 9]$ hat den Typ $(3, 3, 2)$, erfüllt aber die Bedingung (4) nicht. Daher gilt die Umkehrung von (3) nicht für q, also ist $H(q)$ eine irreduzible Kurve, die im singulären Ort von H_9 liegt.

9. Beweismethoden

- Definition. Eine N-Präsentierung einer hauptpolarisierten abelschen Fläche (A, λ) ist 4-Tupel (E_1, E_2, ψ, π), in dem E_i/K eine elliptische Kurve ist, $\psi : E_1[N] \to E_2[N]$ eine Anti-isometrie, und
$$\pi : E_1 \times E_2 \to A$$
eine Isogenie ist derart, daß $\mathrm{Ker}(\pi) = \mathrm{Graph}(-\psi)$ und
$$\pi^*\theta \equiv N(\theta_1 + \theta_2),$$
wobei θ der Theta-divisor von (A, λ) ist und $\theta_i = pr_i(0_{E_i})$.

9. Beweismethoden

- Definition. Eine N-Präsentierung einer hauptpolarisierten abelschen Fläche (A, λ) ist 4-Tupel (E_1, E_2, ψ, π), in dem E_i/K eine elliptische Kurve ist, $\psi : E_1[N] \to E_2[N]$ eine Anti-isometrie, und
$$\pi : E_1 \times E_2 \to A$$
eine Isogenie ist derart, daß $\mathrm{Ker}(\pi) = \mathrm{Graph}(-\psi)$ und
$$\pi^*\theta \equiv N(\theta_1 + \theta_2),$$
wobei θ der Theta-divisor von (A, λ) ist und $\theta_i = pr_i(0_{E_i})$.
- Bemerkung: Es folgt aus der Grundkonstruktion (vgl. [FK]), daß folgendes gilt:
$$(A, \lambda) \text{ besitzt eine } N\text{-Präsentierung} \quad \Leftrightarrow \quad (A, \lambda) \in H_{N_2}.$$

9. Beweismethoden - 2

- Schritt 0: Berechne die verfeinerte Humbert Invariante $q_{(A,\lambda)}$ von (A, λ) aus einer gegebenen N-Präsentierung (E_1, E_2, ψ, π) von (A, λ). Dieses ist das Hauptresultat von [ES]. (In [MS] wurde ein Spezialfall behandelt.)

9. Beweismethoden - 2

- Schritt 0: Berechne die verfeinerte Humbert Invariante $q_{(A,\lambda)}$ von (A,λ) aus einer gegebenen N-Präsentierung (E_1,E_2,ψ,π) von (A,λ). Dieses ist das Hauptresultat von [ES]. (In [MS] wurde ein Spezialfall behandelt.)
- Schritt 1: Benütze die *modulare Interpretation* von $X(N)$, um den Morphismus

  $$\beta_N : X(N)\times X(N) \;\rightarrow\; A_2.$$

  zu konstruieren. Dann zeigt die Grundkonstruktion, daß $\mathrm{Im}(\beta_N) = H_{N^2}$. Zeige, daß β_N endliche Fasern besitzt, und daß β_N eigentlich ist. Somit ist β_N ein endlicher Morphismus.

9. Beweismethoden - 2

- Schritt 0: Berechne die verfeinerte Humbert Invariante $q_{(A,\lambda)}$ von (A, λ) aus einer gegebenen N-Präsentierung (E_1, E_2, ψ, π) von (A, λ). Dieses ist das Hauptresultat von [ES]. (In [MS] wurde ein Spezialfall behandelt.)
- Schritt 1: Benütze die *modulare Interpretation* von $X(N)$, um den Morphismus

$$\beta_N : X(N) \times X(N) \rightarrow A_2.$$

  zu konstruieren. Dann zeigt die Grundkonstruktion, daß $\mathrm{Im}(\beta_N) = H_{N^2}$. Zeige, daß β_N endliche Fasern besitzt, und daß β_N eigentlich ist. Somit ist β_N ein endlicher Morphismus.
- Schritte 2 und 3: Finde eine brauchbare *modulare Interpretation* der (Normalisierung der) Modularkorrespondenz X_A^N. Benütze diese und Schritt 0 um zu zeigen, daß $\beta_N(X_A^N) \subset H(q) \Leftrightarrow q_A^N \sim q$.

10. Literatur

[AP] R. Accola, E. Previato, Covers of Tori: Genus 2. *Letters for Math. Phys.* **76** (2006), 135–161.

[FK] G. Frey, E.K., Curves of genus 2 and associated Hurwitz spaces. *Contemp. Math.* **487** (2009), 33–81.

[EC] E. K., Elliptic curves on abelian surfaces. *Manusc. math.* **84** (1994), 199–223.

[MS] E. K., The moduli spaces of Jacobians isomorphic to a product of two elliptic curves. *Collect. Math.* **67** (2016), 21–54.

[ES] E. K., Elliptic subcovers of a curve of genus 2. Preprint, 2016, 41pp.

[La] H. Lange, Über die Modulvarietät der Kurven vom Geschlecht 2. *J. reine angew. Math.* **281** (1976), 80–96.

[No] A. Nobs, Die irreduziblen Darstellungen der Gruppen $SL_2(\mathbb{Z}_p)$, insbesondere $SL_2(\mathbb{Z}_2)$. 1. Teil. *Comment. Math. Helvetici* **39** (1977), 465–489.