Verallgemeinerte Humbertsche Schemata und Durchschnitte von Humbert Flächen

1. Einleitung

Es sei: $M_g/\mathbb{C}$ der Modulraum der Kurven vom Geschlecht g:
$M_g(\mathbb{C}) = \{\langle C\rangle : g_C = g\}$.

Frage: Was kann man über die Dimension (und Struktur) der Untervarietäten von M_g sagen, die durch "spezielle Kurveneigenschaften" definiert sind?

Beispiele: 1) Kurven mit speziellen Automorphismen;
2) Kurven, die einen nicht-konstanten Morphismus zu einer nicht-rationalen Kurve besitzen;
3) Kurven C, deren Jacobische Varietäten J_C einen nicht-trivialen Endomorphismus besitzen, d.h. $\mathrm{End}(J_C) \neq \mathbb{Z}$.

Bemerkung: Mithilfe der Torelli-Abbildung $C \mapsto (J_C, \lambda_\theta)$ kann man $M_g(\mathbb{C})$ als Teilmenge von $A_g(\mathbb{C})$ auffassen. Hierbei ist $\lambda_\theta : J_C \xrightarrow{\sim} \hat{J}_C$ die Theta-Polarisierung, und A_g bezeichnet den Modulraum, der Isomorphieklassen von hauptpolarisierten abelschen Varietäten (A, λ) der Dimension g klassifiziert.

Wir können also die Isomorphieklasse $\langle C\rangle$ der Kurve mit der Isomorphieklasse $\langle J_C, \lambda_\theta\rangle$ der hauptpolarisierten Jacobischen identifizieren, und daher läßt sich Beispiel 3 auf A_g erweitern.

Humbert (1900): Für jede positive ganze Zahl $n \equiv 0, 1 \pmod 4$, gibt es eine Fläche $H_n \subset A_2$ (genannt eine Humbert Fläche) mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $\mathrm{End}(A) \neq \mathbb{Z} \Leftrightarrow \langle A, \lambda \rangle \in H_n$, für ein n;

(ii) $M_2 = A_2 \setminus H_1$;

(iii) $\exists f : C \to E, g_E = 1 \Leftrightarrow \langle J_C, \lambda_\theta \rangle \in H_{N^2}$, für ein $N \geq 2$.

Bemerkung: Eigenschaft (iii) wurde in [ECAS] (1994) wie folgt verfeinert:

(iii′) $\langle J_C, \lambda_\theta \rangle \in H_{N^2} \Leftrightarrow \exists f : C \to E, \deg(f) = N, f$ minimal.

Hierbei heißt $f : C \to E$ minimal, falls f nur triviale Faktorisierungen besitzt (also $f = f_1 \circ f_2 \Rightarrow \deg(f_1) = 1$ oder $\deg(f_2) = 1$).

Fragen: 1) Wie kann man die Komponenten des Durchschnitts

$$H_n \cap H_m$$

zweier Humbert Flächen beschreiben bzw. analysieren?

2) Allgemeiner, wie kann man die Teilmenge der Kurven (oder der abelschen Varietäten) beschreiben, die eine "spezielle Eigenschaft" besitzen?

2. Das Grundprinzip

Grundidee: Wie später genauer erklärt wird, definiert jede ganze positiv-definite quadratische Form q ein abgeschlossenes Unterschema

$$H_g(q) \subset A_g$$

des Modulraums A_g. Solche Unterschema heißen verallgemeinerte Humbert Schemata.

Eigenschaften: 1) $H_g(q)$ hängt nur von der GL_r-Äquivalenzklasse der quadratischen Form $q = q(x_1, \ldots, x_r)$ ab.

2) Es ist $H_g(q) \neq A_g$, aber $H_g(q)$ könnte leer sein.

3) Die klassische Humbert Fläche ist $H_n := H_2(nx^2)$.

4) Es folgt leicht aus der Definition, daß für $n \neq m$ gilt

$$H_n \cap H_m = \bigcup_{q \to n,m} H_2(q), \tag{1}$$

Hierbei ist die Vereinigung über alle ganzen positiv-definiten binären quadratischen Formen q, die sowohl n wie auch m primitiv repräsentieren. (Bezeichnung: $q \longrightarrow n$, $q \longrightarrow m$.)

N.B. Bis auf Äquivalenz gibt es nur endlich viele Formen q mit dieser Eigenschaft, weil $|\mathrm{disc}(q)| \leq 4mn$.

Fragen: 1) Wann ist $H(q) \neq \emptyset$?

2) Was ist die (birationale) Struktur von $H(q)$?

3) Für einen gegebene Form q, wie kann man die hauptpolarisierten (h.p.) abelschen Flächen (A, λ) in $H(q)$ konstruieren? Gibt es eine "modulare Konstruktion"?

3. Hauptresultate (für $g = 2$)

Satz 1: Sei q eine positive quadratische Form in r Variablen. Ist $H(q) := H_2(q) \neq \emptyset$, so hat $H(q)$ die Codimension r in A_2; d.h.,

$$\dim H(q) \;=\; 3 - r.$$

Ferner, ist q' eine zweite positive quadratische Form, so gilt

$$H(q) \;=\; H(q') \quad \Leftrightarrow \quad q \;\sim_{\mathrm{GL}_r}\; q'. \tag{2}$$

N.B. Für $r = 1$ ist $q(x) = nx^2$ mit $n \geq 1$, und dann gilt

$$H_n := H(nx^2) \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; n \equiv 0, 1 \pmod 4.$$

Daher sind die Humbert Flächen genau diejenigen, die im Fall $r = 1$ auftreten.

Definition: Eine ganze positive binäre quadratische Form

$$q(x, y) \;=\; ax^2 + bxy + cy^2$$

besitzt den Typ (n, m, d), falls folgendes gilt:

(i) $\mathrm{disc}(q) := b^2 - 4ac = -16m^2 d < 0$ und $(n, d) = 1$;

(ii) $q \longrightarrow (mn)^2$;

(iii) $q(x, y) \equiv 0, 1 \pmod 4, \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}$.

Die Menge aller quadratischen Formen vom Typ (n, m, d) sei mit $T(m, n, d)$ bezeichnet.

Satz 2: Sei q eine ganze binäre quadratische Form derart, daß $q \longrightarrow N^2$, für ein $N \geq 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (3)\; H(q) \neq \emptyset \;&\Leftrightarrow\; H(q) \text{ ist eine irreduzible Kurve} \\ &\Leftrightarrow\; q \in T(N/m, m, d), \text{ für ein } m|N, d \geq 1 \\ &\qquad\qquad \text{mit } (N/m, d) = 1. \end{aligned}$$

Korollar: Ist $m \equiv 0, 1 \pmod 4$ und $N \geq 1$, so ist

$$H_m \cap H_{N^2} \neq \emptyset.$$

Ferner, ist $m > 1$ und $N > 1$, so gilt sogar

$$H_m \cap H_{N^2} \cap M_2 \neq \emptyset.$$

Beweisidee. Betrachte $q = [N^2, 2\varepsilon N, m] \in T(1, N, \frac{m-\varepsilon}{4})$, wobei $\varepsilon = \mathrm{Rest}(m, 4)$.

Bemerkung: Die Bedeutung der Parameter (n, m, d) wird zum Teil durch die folgende Tatsache erläutert. Diese führt auch zu der später betrachteten modularen Konstruktion.

Satz 3: Es sei C eine Kurve vom Geschlecht 2, und seien $N \geq 2$, $d \geq 1$ zwei ganze Zahlen. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) $\langle C \rangle \in H(q)$, für ein $q \in T(N/m, m, d)$, wobei $m|N$ und $(N/m, d) = 1$;

(ii) Es gibt zwei komplementäre elliptische Unterlagerungen $f_i : C \to E_i$ vom Grad N und eine zyklische Isogenie $h : E_1 \to E_2$ vom Grad d.

N.B. Eine *elliptische Unterlagerung* ist ein minimaler Morphismus $f : C \to E$ nach einer elliptischen Kurve E. Zwei elliptische Unterlagerungen $f_i : C \to E_i$ heißen *komplementär*, falls die folgende Sequenz exakt ist:

$$0 \to J_{E_1} \xrightarrow{f_1^*} J_C \xrightarrow{(f_2)_*} J_{E_2} \to 0.$$

4. Einige Anwendungen

Anwendung 1: *Die irreduziblen Komponenten von* $H_m \cap H_{N^2}$.

Diese lassen sich mithilfe von (1)–(3) und der Reduktiontheorie (der binären quadratischen Formen) berechnen. Zum Beispiel:

$$\begin{aligned} H_5 \cap H_4 &= H[1,0,4] \cup H[4,0,5] \cup H[4,4,5], \\ H_5 \cap H_9 &= H[4,0,5] \cup H[5,2,9] \cup H[5,4,8]. \end{aligned}$$

Die Anzahl der irreduziblen Komponenten von $H_m \cap H_{N^2}$ ist:

$N^2 \backslash m$	1	4	5	8	9	12	13	16	17	20	21	24	25
1	$*$	1	1	2	1	2	2	2	3	3	2	3	3
4	1	$*$	3	4	3	4	5	5	5	6	5	6	6
9	1	3	3	5	$*$	6	5	6	8	7	7	9	9
16	2	5	5	6	6	9	9	$*$	9	12	10	11	12
25	3	6	6	8	9	9	10	12	15	14	11	13	$*$

Anwendung 2: *Kurven mit zusätzlichen Automorphismen.*

Satz 4: Es sei C eine Kurve vom Geschlecht 2. Dann gilt:

(a) $V_4 \simeq D_2 \le \mathrm{Aut}(C) \Leftrightarrow \langle C \rangle \in H_4$.

(b) $D_4 \le \mathrm{Aut}(C) \Leftrightarrow \langle C \rangle \in H[4,0,4]$.

(c) $S_3 \simeq D_3 \le \mathrm{Aut}(C) \Leftrightarrow \langle C \rangle \in H[4,4,4]$.

(d) $D_3, D_4 \le \mathrm{Aut}(C) \Leftrightarrow \langle C \rangle \in H[4,0,4] \cap H[4,4,4]$.

N.B. Die Kurven in diesen Familien haben explizite Gleichungen:

(a) $y^2 = x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)(x-\alpha\beta)$ (Jacobi, 1832)

(b) $y^2 = x(1-x^2)(1-\kappa^2 x^2)$ (Legendre, 1832)

(c) $y^2 = x^6 + ax^3 + 1$ (Bolza, 1888)

(d) $y^2 = x(x^4-1)$ (Bolza, 1888; Burnside)

Anwendung 3: *Isogene elliptische Involutionen.*

Eine elliptische Involution ist ein $\sigma \in \mathrm{Aut}(C)$ mit $\sigma^2 = 1$ derart, daß $C_\sigma := C/\langle\sigma\rangle$ eine elliptische Kurve ist.

Satz 5: Es sei C eine Kurve vom Geschlecht 2 mit hyperelliptisher Involution σ_C, und sei $d \geq 1$. Äquivalent sind:

(i) Es gibt eine elliptische Involution $\sigma \in \mathrm{Aut}(C)$ und eine zyklische Isogenie $h : C_\sigma \to C_{\sigma\sigma_C}$ vom Grad d;

(ii) $\langle C\rangle \in H[4,0,4d] \cup H[4,4,4d+1] \cup H(d)$, wobei

$$H(d) = \begin{cases} H[4,4,d+1], & \text{falls } d \equiv 3 \pmod 4, \\ H[4,0,d], & \text{falls } d \equiv 1 \pmod 4, d > 1, \\ \emptyset, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bemerkung: Nach Accola/Previato [AP] (2006), p. 142: "A condition for being isogenous to any degree does not appear to be known".

Anwendung 4: *Kurven mit elliptischen Morphismen.*

Es sei $\mathcal{L}_d \subset M_2$ der Modulraum der Geschlecht 2 Kurven C mit einem Morphismus $C \xrightarrow{f} E$ vom Grad d nach einer elliptischen Kurve E. Es ist also

$$\mathcal{L}_d := \bigcup_{1<N|d} H_{N^2} \cap M_2.$$

Frage ([AP]): Wann ist $\mathcal{L}_d$ zusammenhängend?

Antwort: **Immer!** Denn aus dem Korollar von Satz 2 folgt sogar, daß sich stets je zwei irreduzible Komponenten von $\mathcal{L}_d$ treffen.

Anwendung 5: *Jacobische Produktflächen:* $J_C \simeq E_1 \times E_2$.

Satz 6: Es sei C eine Kurve vom Geschlecht 2. Äquivalent sind:

(i) $J_C \simeq E_1 \times E_2$, für geeignete elliptische Kurven E_1, E_2;

(ii) $\langle J_C, \lambda_\theta \rangle \in H(q)$, für ein $q \in T(N, 1, d)$ mit $(N, d) = 1$.

Bemerkung: Hayashida and Nishi (1965) stellten die folgende Frage, die sie aber nicht vollständig lösen konnten:

Für welche Paare (E_1, E_2) *ist* $E_1 \times E_2 \simeq J_C$, *für ein* C?

Mithilfe von Satz 6 (und tiefliegenden Resultaten aus der Zahlentheorie) kann man beweisen (s. [MS], [JT]):

Satz 7: (a) Es sei $\mathrm{Hom}(E_1, E_2) = \mathbb{Z}f$ und $d = \deg(f)$. Dann gibt es eine Kurve C mit $J_C \simeq E_1 \times E_2$ genau dann, wenn $d > 1$ und d kein numerus idoneus mit $d \equiv 2, 4, 6 \pmod 8$ ist. Mit anderen Worten, C existiert solange $d \notin L$, wobei

$$\begin{aligned} L = \{&1, 2, 4, 6, 10, 12, 18, 22, 28, 30, 42, 58, 60, 70, 78, \\ &102, 130, 190, 210, 330, 462, d^*\}; \end{aligned}$$

hierbei ist $d^* > 10^9$ eine weitere mögliche Zahl mit dieser Eigenschaft. Ferner gibt es kein solches d^* falls die Vermutung von Euler/Gauss (oder falls die Verallgemeinerte Riemannsche Hypothese (GRH)) richtig ist.

(b) Ist $\mathrm{Rg}(\mathrm{Hom}(E_1, E_2)) > 1$, so existiert stets eine Kurve C mit $J_C \simeq E_1 \times E_2$, außer für endlich viele Paare (E_1, E_2) von Isomorphieklassen elliptischer Kurven. (Genaue #: 46 Paare.)

Genauer gibt es genau 15 (Isomorphieklassen von) Flächen A mit Picardzahl $\rho(A) \geq 4$ derart, daß $A \not\simeq J_C$, für irgendeine curve C. (Jede solche Fläche A ist eine Produktfläche.)

5. Die verfeinerte Humbert Invariante

Grundidee: Die Néron-Severi Gruppe $\mathrm{NS}(A)$ einer h.p. abelschen Varietät (A,λ) besitzt eine kanonische quadratische Form $q_{(A,\lambda)}$, die verfeinerte Humbert Invariante. Diese wird wie folgt definiert.

Sei: A/K eine abelsche Varietät mit $\dim(A) = g$ (K ein Körper),
$\mathrm{NS}(A) = \mathrm{Pic}(A)/\mathrm{Pic}^0(A)$ ihre Néron-Severi Gruppe,
$\lambda : A \xrightarrow{\sim} \hat{A}$ eine Hauptpolarisierung.

Dann gibt es eine natürliche Injektion

$$\Phi_\lambda : \mathrm{NS}(A) \to \mathrm{End}_\lambda(A) := \{\alpha \in \mathrm{End}(A) : \hat{\alpha}\lambda = \lambda\alpha\},$$

die durch $\Phi_\lambda(D) = \lambda^{-1} \circ \phi_D$ gegeben ist. Außerdem ist Φ_λ ein Isomorphismus, falls K algebraisch abgeschlossen ist (Mumford).

Proposition 0: (a) Es sei $\mathrm{tr} : \mathrm{End}(A) \to \mathbb{Z}$ die übliche Spurabbildung. Dann definiert

$$q_A(\alpha) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\alpha^2),$$

eine ganze, positive quadratische Form q_A auf $\mathrm{End}_\lambda(A)$.

(b) Die Formel

$$q_{(A,\lambda)}(\alpha) = \tfrac{1}{4}(2g\ \mathrm{tr}(\alpha^2) - \mathrm{tr}(\alpha)^2)$$

definiert eine ganze, positiv-definite quadratische Form $q_{(A,\lambda)}$ auf der Quotientengruppe $\overline{\mathrm{End}}_\lambda(A) := \mathrm{End}_\lambda(A)/\mathbb{Z}1_A$.

Definition: Die quadratische Form $q_{(A,\lambda)}$ heißt die *verfeinerte Humbert Invariante* von (A,λ).

Bemerkungen: 1) Wenn K algebraisch abgeschlossen ist, so ist $\lambda = \phi_\theta$, für ein $\theta \in \mathrm{NS}(A)$, und dann induziert Φ_λ einen Isomorphismus

$$\bar{\Phi}_\lambda : \mathrm{NS}(A,\theta) := \mathrm{NS}(A)/\mathbb{Z}\theta \xrightarrow{\sim} \overline{\mathrm{End}}_\lambda(A).$$

Daher kann man $q_{(A,\lambda)} = q_{(A,\theta)}$ auch als quadratische Form auf $\mathrm{NS}(A,\theta)$ betrachten. (Beachte: $\theta \in \mathrm{NS}(A)$ ist durch λ eindeutig bestimmt.)

2) Falls A eine abelsche Fläche ist (also $g = 2$), so gilt

$$q_{(A,\lambda)}(\Phi_\lambda(D)) = (D.\theta)^2 - 2(D.D), \quad \forall D \in \mathrm{NS}(A).$$

Außerdem wurde in [ECAS] gezeigt, daß wenn $\bar{D} \in \mathrm{NS}(A,\theta)$ primitiv ist, (d.h., wenn $\mathrm{NS}(A,\theta)/\mathbb{Z}\bar{D}$ torsionsfrei ist), so ist

$$N = q_{(A,\lambda)}(\bar{D}) = q_{(A,\theta)}(\bar{D})$$

die klassische Humbert Invariante von A, die Humbert im Fall $K = \mathbb{C}$ mithilfe der Periodenmatrix von A definiert hat.

Man beachte, dass wenn $\mathrm{rank}(\mathrm{NS}(A)) > 2$ ist, so besitzt (A,λ) unendlich viele verschiedene (klassische) Humbert Invarianten $N = q_{(A,\theta)}(\bar{D})$.

6. Verallgemeinerte Humbertsche Schemata

Prinzip: Mann kann die verfeinerte Humbert Invariante $q_{(A,\lambda)}$ benützen, um abgeschlossene Unterschemata $H_g(q)$ des Modulraums A_g zu definieren.

Definition: Es seien (M_1, q_1) und (M_2, q_2) zwei quadratische $\mathbb{Z}$-Moduln. Dann *repräsentiert* (M_1, q_1) den Modul (M_2, q_2) *primitiv,* falls es eine Injektion $f : M_2 \longrightarrow M_1$ gibt derart, daß

$$f \circ q_1 = q_2 \quad \text{und} \quad M_1/f(M_2) \text{ torsionfrei ist.}$$

Ist dies der Fall, so schreibt man $q_1 \rightarrow q_2$.

N.B.: Ist $n \in \mathbb{Z}$, so gilt $q_1 \rightarrow n$ (im Sinne des §2) genau dann, wenn $q_1 \rightarrow q_2 := nx^2$.

Bezeichnung: Ist q eine positive quadratische Form (auf $\mathbb{Z}^r$), so sei

$$H_g(q) := \{(A, \lambda) \in A_g(\overline{K}) : q_{(A,\lambda)} \rightarrow q\}.$$

Satz 0: $H_g(q)$ ist ein abgeschlossenes Unterschema von A_g, vorausgesetzt, daß $\mathrm{char}(K)^2 \nmid \mathrm{disc}(q)$.

Beispiele: 1) Wie schon erwähnt, ist die klassische Humbert Fläche durch $H_n = H_2(nx^2)$ definiert (wenn $K = \mathbb{C}$).

2) Ist $(A, \lambda) \in A_g$, so ist $\mathrm{NS}(A) \not\simeq \mathbb{Z} \Leftrightarrow (A, \lambda) \in H_g(nx^2)$, für ein $n \geq 1$. (Analogon zu Humberts Resultat (i).)

Offene Fragen: 1) Wann ist $H_g(q) \neq \emptyset$?

2) Berechne $\dim H_g(q)$ (falls $H_g(q) \neq \emptyset$).

3) Wann ist $H_g(q)$ irreduzibel?

7. Die modulare Konstruktion $(g = 2)$

Die Grundkonstruktion ("basic construction"); vgl. [FK1], [FK2]: Es sei $N \geq 1$ und (E_1, E_2, ψ) ein Tripel, das aus zwei elliptischen Kurven E_i/K und einem Isomorphismus

$$\psi : E_1[N] \xrightarrow{\sim} E_2[N]$$

der Gruppen $E_i[N]$ der N-Torsionspunkten besteht. Sei

$$\pi_\psi : E_1 \times E_2 \longrightarrow A_\psi := (E_1 \times E_2)/(\mathrm{Graph}(\psi))$$

der Quotientenhomomorphismus, der also eine Isogenie vom Grad $N^2 = |\mathrm{Graph}(\psi)|$ ist.

Ist ψ eine Anti-isometrie (bzgl. den Weilpaarungen auf $E_i[N]$), und ist $\overline{K} = K$, so $\exists! \theta_\psi \in \mathrm{NS}(A_\psi)$ derart, daß

$$\pi_\psi^* \theta_\psi = N(\theta_1 + \theta_2), \quad \text{wobei } \theta_i = pr_i^*(0_{E_i}),$$

und dann ist $(A_\psi, \lambda_{\theta_\psi}) \in A_2$ eine h.p. abelsche Fläche. Daher, wenn

$$\mathcal{Z}_N \;=\; \{\langle E_1, E_2, \psi \rangle_N\}$$

Menge der Isomorphieklassen solcher Tripel bezeichnet, so definiert die Regel $(E_1, E_2, \psi) \mapsto (A_\psi, \lambda_\psi)$ eine Abbildung

$$\beta_N : \mathcal{Z}_N \;\longrightarrow\; A_2,$$

die in [FK2] die Grundkonstruktion ("basic construction") genannt wird.

Tatsachen: 1) Ist $K = \mathbb{C}$, so kann man $\mathcal{Z}_N = \{\langle E_1, E_2, \psi\rangle_N\}$ mit den Punkten der Quotientenvarietät

$$Z_N \;=\; (X(N) \times X(N))/(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})/\pm 1)$$

identifizieren, wobei $X(N) = \Gamma(N)\backslash\mathfrak{H}$ die Modulkurve der Stufe N ist, und die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ auf der Produktfläche $X(N) \times X(N)$ durch eine (getwistete) Diagonalwirkung operiert. Ferner gibt es einen Morphismus von Varietäten

$$\beta_N : Z_N \;\to\; A_2,$$

der, via der obigen Identifikation, mit der Grundkonstruktion übereinstimmt.

2) Das Bild von β_N ist die Humbert Fläche H_{N^2}, und der induzierte Morphismus

$$\beta_N : Z_N \;\to\; \beta_N(Z_N) = H_{N^2}$$

ist endlich vom (generischen) Grad 2.

Frage: Wie sieht $\beta_N^{-1}(H(q))$ aus, wenn q eine binäre Form ist mit $\emptyset \neq H(q) \subset H_{N^2}$?

Vermutung: $\beta_N^{-1}(H(q))$ ist die Vereinigung von höchstens zwei Modulkurven auf Z_N, d.h., von Kurven, die Bilder sind der Modularkorrespondenzen $T_{A,N}$ auf $X(N) \times X(N)$.

8. Der Fall der Produktflächen A $(m = 1)$

Sei $X_0(d) = \Gamma_0(d)\backslash\mathfrak{H}$, die Hecke Modulkurve, und sei

$\mathcal{X}_0(d) = \{\langle E_1, E_2, h\rangle : h \in \mathrm{Hom}(E_1, E_2) \text{ zyklisch}, \deg(h) = d\}$.

N.B.: Wie bekannt, $\exists$ natürliche Bijektion $\mathcal{X}_0(d) \leftrightarrow X_0(d)(\mathbb{C})$.

Fixiere N, und seien k, d derart, daß $k^2 d \equiv -1 \pmod N$. Dann definiert die Regel $\tau_{d,k,N}(\langle E_1, E_2, h\rangle) = \langle E_1, E_2, kh_{|E_1[N]}\rangle$ eine Abbildung

$$\tau_{d,k,N} : \mathcal{X}_0(d) \ \to \ \mathcal{Z}_N,$$

die, via den obigen Identifikationen, von einem Morphismus

$$\tau_{d,k,N} : X_0(d) \ \to \ Z_N$$

induziert wird. Außerdem ist $\tau_{d,k,N}$ birational auf sein Bild. Betrachte die Komposition

$$\mu_{d,k,N} := \beta_N \circ \tau_{d,k,N} : X_0(d) \to Z_N \ \to \ A_2.$$

Satz 8: Das Bild von $\mu_{d,k,N} : X_0(d) \to A_2$ ist

$$\mu_{d,k,N}(X_0(d)) \ = \ H(q_{d,k,N}),$$

wobei

$$q_{d,k,N} = [N^2, 2kt, (k^2t^2 + 4d)/N^2] \text{ mit } t = d(k^2d + 3).$$

Korollar: Ist $q \in T(N, 1, d)$, so ist $H(q) = \mu_{d,k,N}(X_0(d))$, für ein k mit $k^2 d \equiv -1 \pmod N$.

N.B.: Hierzu wird noch die folgende Tatsache benötigt:

Lemma: Eine binäre quadratische Form q ist vom Typ $(N, 1, d)$ genau dann, wenn $q \sim q_{d,k,N}$, für ein k mit $dk^2 \equiv -1 \pmod N$.

Bemerkung: Ist $q \in T(N,1,d)$, so kann man die Normalisierung $\tilde{H}(q)$ von $H(q)$ genau angeben; s. [MS]. Genauer gilt:

Satz 9: Es sei $q \in T(N,1,d)$, also $q \sim q_{d,k,N}$ mit $dk^2 \equiv -1\,(N)$.

(a) Der Morphismus $\mu_{d,k,N}$ faktorisiert über die Normalisierung $\nu_{N^2} : \tilde{H}_{N^2} \to H_{N^2}$ der Humbertfläche H_{N^2}, und sein Bild auf $\tilde{H}_{N^2}$ ist birational isomorph zu der Fricke Kurve

$$X_0(d)^+ := X_0(d)/\langle w_d \rangle, \quad \text{wobei} \;\; w_d = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ d & 0 \end{smallmatrix}\right).$$

(b) Der induzierte Morphismus $\nu_{d,k,N} : X_0(d)^+ \to \tilde{H}(q)$ ist ein Isomorphismus, außer wenn q eine (nicht-triviale) ambige Form ist. In diesem Ausnahmefall ist $\deg(\nu_{d,k,N}) = 2$ und

$$\tilde{H}(q) \simeq X_0(d)/\langle w_d, \alpha_{d_1} \rangle,$$

für eine (explizit berechenbare) Atkin-Lehner involution α_{d_1} mit $d_1 | d$ und $(d_1, d/d_1) = 1$.

Bemerkungen: 1) Ist $a := \deg(\nu_{d,k,N}) > 1$, so folgt, daß die Kurve $H(q) \subset (H_{N_2})^{sing}$ im singulären Ort von H_{N^2} liegt, und daher ist dann H_{N^2} nicht normal.

2) Nach Satz 9 ist $\tilde{H}(q)$ durch die Angabe von d, a und d_1 genau bestimmt. Ferner kann man das Geschlecht von $\tilde{H}(q)$ explizit ausrechnen; zum Beispiel ist

$$g(X_0(d)^+) = (g(X_0(d)) + 1)/2 - (h(-d) + h(-4d))/4,$$

wobei $h(D)$ die Anzahl der Klassen primitiver Formen der Diskiminante D ist. (Also ist $h(D) = 0$, wenn $D \not\equiv 0, 1 \pmod 4$.)

Beispiel: Die Komponenten von $H_9 \cap H_{25}$.

q	$g(H(q))$	3-Typ	a	d_1	5-Typ	a	d_1
$[9,0,16]$	0	$(1,3,4)$	$-$	$-$	$(5,1,36)$	2	4
$[4,0,9]$	0	$(1,3,1)$	$-$	$-$	$(5,1,9)$	1	$-$
$[5,2,9]$	0	$(3,1,11)$	1	$-$	$(5,1,11)$	1	$-$
$[8,8,9]$	0	$(3,1,14)$	2	2	$(5,1,14)$	2	2
$[9,4,12]$	0	$(3,1,26)$	1	$-$	$(5,1,26)$	1	$-$
$[9,6,25]$	1	$(1,3,6)$	$-$	$-$	$(5,1,54)$	1	$-$
$[9,4,20]$	1	$(3,1,44)$	1	$-$	$(5,1,44)$	1	$-$
$[9,8,24]$	0	$(3,1,50)$	1	$-$	$(1,5,2)$	$-$	$-$
$[9,2,25]$	1	$(3,1,56)$	1	$-$	$(5,1,56)$	1	$-$

Daher hat $H_9 \cap H_{25}$ genau 9 irreduzible Komponenten, und

$$\begin{aligned} H[8,8,9] &\subset (H_9)^{sing}, \\ H[9,0,16] \cup H[8,8,9] &\subset (H_{25})^{sing}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist weder H_9 noch H_{25} normal.

9. Der allgemeine Fall $(m \geq 1)$

Vorbemerkung: Hier werden alle Modularkorrespondenzen $T_{A,N}$ auf $X(N) \times X(N)$ benötigt. Jede solche wird durch primitive matrix $A \in \mathcal{M}_d$ definiert, wobei

$$\mathcal{M}_d = \Gamma(1)\alpha_d\Gamma(1), \quad \text{with } \Gamma(1) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \alpha_d = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right).$$

Modulare Beschreibung von $T_{A,N}$: Es sei

$$\mathcal{T}_{A,N} = \{\langle E_1, \alpha_1; E_2, \alpha_2; h\rangle_N\};$$

hierbei ist $\alpha_i : E_i[N] \xrightarrow{\sim} V_N := (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ eine (symplektische) Stufe-N-Struktur, $h : E_1 \to E_2$ eine zyklische Isogenie vom Grad $d = \det(A)$ derart, dass

$$\alpha_2 \circ h_{|E_1[N]} = [A]_N \circ \alpha_1, \quad \alpha_1 \circ (h^t)_{|E_2[N]} = [A^*]_N \circ \alpha_2,$$

wobei $[A]_N \in \mathrm{End}(V_N)$ durch die Matrix $A \pmod N$ gegeben ist (via der Standardbasis von V_N), und $A^* = \det(A)A^{-1}$.

Bezeichnung: Es sei $\tau_{A,N} : \mathcal{T}_{A,N} \to \mathcal{Z}_N$ durch die Regel

$$\tau_{A,N}(x) = \langle E_1, E_2, \psi_x\rangle_N$$

definiert, wobei

$$\psi_x := \alpha_2^{-1} \circ [\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)]_N \circ \alpha_1, \quad \text{wenn } x = \langle E_1, \alpha_1; E_2, \alpha_2; h\rangle_N.$$

Durch die modulare Interpretation induziert dies einen Morphismus

$$\tau_{A,N} : T_{A,N} := \Gamma_{A,N}\backslash\mathfrak{H} \to Z_N,$$

der zugehörigen (groben) Modulschemata; hierbei ist

$$\Gamma_{A,N} := \Gamma(N) \cap A^{-1}\Gamma(N)A \geq \Gamma(Nd).$$

Wir betrachten nun die Komposition

$$\mu_{A,N} \ := \ \beta_N \circ \tau_{A,N} : T_{A,N} \ \to \ Z_N \ \to \ A_2.$$

N.B.: 1) Ist $k^2 d \ \equiv \ -1 \,(\mathrm{mod}\, N)$, und ist $\sigma_k \ \in \ \Gamma(1)$ derart, daß $\sigma_k \ \equiv \ \left(\begin{smallmatrix} k^{-1} & 0 \\ 0 & k \end{smallmatrix}\right) \,(\mathrm{mod}\, N)$, so faktorisiert $\tau_{\sigma_k \alpha_d, N}$ über den vorherdefinierten Morphismus $\tau_{d,k,N}$, und beide haben das gleiche Bild in Z_N. Daher kann man $\mu_{A,N}$ als Verallgemeinerung von $\mu_{d,k,N}$ betrachten. (Allerdings ist im allgemeinen $\tau_{A,N}$ nicht mehr birational auf sein Bild.)

2) Verschidene Matrizen $A \in \mathcal{M}_d$ können die gleiche Bildkurve $\overline{T}_{A,N} := \tau_{A,N}(T_{A,N})$ auf Z_N produzieren. Es ist daher nützlich, den folgenden Begriff einzuführen.

Definition: Eine Matrix $A \in \mathcal{M}_d = \Gamma(1)\alpha_d\Gamma(1)$ heißt (rechts-) normalisiert, falls sie die folgende Form hat:

$$A \ = \ g\alpha_d \ = \ g \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \quad \text{mit} \quad g \in \Gamma(1) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Satz 10: Ist $A = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_d$ normalisiert, so gilt

$$\mu_{A,N}(T_{A,N}) \ = \ H(q_{A,N}),$$

wobei $q_{A,N} \in T(N/m, m, d)$ durch die Formel

$$q_{A,N} \ = \ [N^2, 2m(x-w), m^2(\mathrm{tr}(A)^2 - 4yz)/N^2]$$

gegeben ist. Hierbei ist $m := N/\gcd(\mathrm{tr}(A), y, z, N)$.

Korollar: Ist $q \in T(N/m, m, d)$, so ist $H(q) = \mu_{A,N}(T_{A,N})$ mit einer geeigneten normalisierten Matrix $A \in \mathcal{M}_d$. Insbesondere ist also $H(q)$ eine irreduzible Kurve.

Dieses Korollar folgt aus Satz 10 zusammen mit der folgenden Verallgemeinerung des vorhergehenden Lemmas:

Lemma′: Ist $q \in T(N/m, m, d)$, so gibt es eine (explizit berechenbare) normalisierte Matrix $A \in \mathcal{M}_d$ derart, daß $q \sim q_{A,N}$.

Bemerkungen: 1) Satz 10 and sein Korollar liefern die Existenzaussage von Satz 2.

2) Wir fassen zusammen:

(i) Jede Modularkorrespondenz $\overline{T}_{A,N} := \tau_{A,N}(T_{A,N})$ auf Z_N definiert via β_N eine (verallgemeinerte) Humbertkurve

$$H(q) = \beta_N(\overline{T}_{A,N}) \subset Z_{N^2}.$$

Diese wird durch Satz 9 explizit beschrieben.

(ii) Umgekehrt, jedes (nicht leere) $H(q) \subset Z_{N^2}$ (mit q binär) ist das Bild einer geeigneten Modularkorrespondenz $\overline{T}_{A,N}$. Ferner kann man die (normalisierte) Matrix A aus der Vorgabe von q explizit berechnen (s. Lemma′).

10. Literatur

[AP] R. Accola, E. Previato, Covers of Tori: Genus 2. *Letters for Math. Phys.* **76** (2006), 135–161.

[FK1] G. Frey, E.K., Curves of genus 2 covering elliptic curves and an arithmetical application. *Progress in Math.* **89**, Birkhäuser, Boston, 1991; pp. 153–176.

[FK2] G. Frey, E.K., Curves of genus 2 and associated Hurwitz spaces. *Contemp. Math.* **487** (2009), 33–81.

[HN] T. Hayashida, M. Nishi, Existence of curves of genus 2 on a product of two elliptic curves. *J. Math. Soc. Japan* **20** (1965), 1-16.

[ECAS] E. K., Elliptic curves on abelian surfaces. *Manusc. math.* **84** (1994), 199–223.

[MS] E.K., The moduli spaces of Jacobians isomorphic to a product of two elliptic curves. Preprint, 39pp.

[JT] E.K., Jacobians isomorphic to a product of two elliptic curves and ternary quadratic forms. Preprint, 36pp.