Kurven vom Geschlecht 2 auf abelschen Produktflächen

Ernst Kani
Queen's University

Universität Duisburg-Essen
27. August 2022

Übersicht

1. Einleitung

- Frage: Es sei A/K eine abelsche Fläche über einem algebraisch-abgeschlossenen Körper K. Wie viele verschiedene glatte Kurven C vom Geschlecht 2 gibt es auf A?
- Bezeichnung: Es sei N_A^* die Anzahl der Isomorphieklassen von glatten Kurven C vom Geschlecht 2, die auf A liegen.

  Ferner sei N_A die Anzahl der Isomorphieklassen der Hauptpolarisierungen auf A. (Es ist also $N_A^* \leq N_A$.)
- Hayashida (1965): bestimmt N_A^* und N_A in dem Fall, daß A eine abelsche Produktfläche ohne CM ist, d.h. $A \simeq E \times E'$, wobei $\mathrm{End}(E) = \mathbb{Z}$ und $E' \sim E$.

1. Einleitung – 2

- Hayashida (1968): bestimmt N_A^* und N_A in dem Fall, daß $A \simeq E \times E$ ist, wenn $\mathrm{End}(E) \simeq \mathcal{O}_F$ eine imaginär-quadratische Maximalordnng ist.
- Ibukiyama, Katsura, Oort (1986): bestimmen N_A^* und N_A in dem Fall, daß A eine supersinguläre abelsche Produktfläche ist.
- Narbonne (2022): gibt in einem Preprint einen Algorithmus an, der die Summe $\sum_{A \in \mathcal{A}_F} N_A^*$ berechnet, wobei F ein imaginär-quadratischer Körper ist, und $\mathcal{A}_F$ ein Vertretersystem der Isomorphieklassen von abelschen Produkflächen mit $A \simeq E \times E'$ ist, wobei $\mathrm{End}(E) \simeq \mathrm{End}(E') \simeq \mathcal{O}_F$.

2. Einleitung – 3

- Bemerkung: In allen der oben erwähnten Arbeiten (außer der ersten) spielt bei der Berechnung von N_A^* die Theorie der Quaternionenordnungen (sowie Formeln von Eichler) eine große Rolle.
- Das Ziel dieses Vortrags ist, eine neue allgemeine Formel zur Berechnung von N_A^* vorzustellen, und diese im Fall von abelschen Produktflächen auszuwerten.

2. Formulierung des Problems

- Bezeichnungen: Ist A/K eine abelsche Fläche, so bezeichne $\equiv$ die numerische Äquivalenz zweier Divisoren auf A, d.h.

$$D \equiv D' \Leftrightarrow (D.D'') = (D'.D''), \forall D'' \in \mathrm{Div}(A),$$

wobei $(D.D')$ die Schnittzahl zweier Divisoren $D, D' \in \mathrm{Div}(A)$ ist. Die numerische Äquivalenzklasse eines Divisors D wird mit $\mathrm{cl}(D) \in \mathrm{NS}(A)$ bezeichnet. Die Menge der Äquivalenzklassen

$$\mathrm{NS}(A) := \{\mathrm{cl}(D) : D \in \mathrm{Div}(A)\}$$

ist eine Quotientengruppe von $\mathrm{Div}(A)$, und heißt die Néron-Severi Gruppe von A. Ferner sei

$$\mathcal{P}(A) = \{\theta \in \mathrm{NS}(A) : (\theta.\theta) = 2, \theta \text{ ampel}\}$$

die Menge der Hauptpolarisierungen auf A.

2. Formulierung des Problems – 2

- Bemerkungen: (a) Es ist bekannt, daß $\mathrm{NS}(A)$ eine freie abelsche Gruppe von endlichem Rang ist, d.h., $\mathrm{NS}(A) \simeq \mathbb{Z}^\rho$. Der Rang $\rho = \rho(A) \geq 1$ heißt die Picardzahl von A.
- (b) Ist $C \subset A$ eine glatte Kurve vom Geschlecht 2, so ist $\theta_C = \mathrm{cl}(C) \in \mathcal{P}(A)$ eine Hauptpolarisierung auf A. Es sei

$$\mathcal{P}^*(A) = \{\theta_C : C \text{ ist eine glatte Kurve auf } A \text{ mit } g_C = 2\}.$$

- (c) Die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(A)$ von A operiert auf $\mathrm{Div}(A)$, und auch auf $\mathrm{NS}(A)$, $\mathcal{P}(A)$ und auf $\mathcal{P}^*(A)$. Nach Torelli gilt:

$$N_A^* \; = \; |\,\mathrm{Aut}(A)\backslash\mathcal{P}^*(A)|,$$

wenn N_A^* wie in der Einleitung definiert ist. Außerdem ist $N_A = |\,\mathrm{Aut}(A)\backslash\mathcal{P}(A)|$.

3. Eine neue Methode

- Die Grundidee: Jede Hauptpolarisierung $\theta \in \mathcal{P}(A)$ besitzt eine kanonisch definierte quadratische Form q_θ (genannt die verfeinerte Humbert Invariante), und diese Tasache liefert eine Zerlegung von $\mathcal{P}(A)$ in Teilmengen $\mathcal{P}(A, q)$, die einfacher zu handhaben sind.
- Definition: Ist $\theta \in \mathcal{P}(A)$, so folgt aus dem Satz von Hodge, daß die Funktion

$$q_\theta(D) \;=\; (\theta.D)^2 - 2(D.D), \quad D \in \mathrm{NS}(A),$$

  eine positiv-definite quadratische Form auf der Quotientengruppe

$$\mathrm{NS}(A, \theta) \;:=\; \mathrm{NS}(A)/\mathbb{Z}\theta$$

  definiert. Der quadratische Modul $(\mathrm{NS}(A, \theta), q_\theta)$ heißt die *verfeinerte Humbert Invariante* von (A, θ).

3. Eine neue Methode – 2

- Bezeichnung: Ist q eine quadratische Form in $r = \rho(A) - 1$ Variablen, so sei

$$\mathcal{P}(A, q) \ := \ \{\theta \in \mathcal{P}(A) : q_\theta \sim q\}.$$

  Hierbei bedeutet die Bezeichnung $q_\theta \sim q$, daß die quadratischen Formen q_θ und q äquivalent sind, d.h., es gibt einen Isomorphismus $\alpha : \mathrm{NS}(A, \theta) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^r$ derart, daß $q \circ \alpha = q_\theta$ ist.
- Bemerkung: Es ist leicht zu sehen, daß $\mathrm{Aut}(A)$ auf $\mathcal{P}(A, q)$ operiert. Daher liefert $\overline{\mathcal{P}}(A, q) := \mathrm{Aut}(A) \backslash \mathcal{P}(A, q)$ Information über N_A (und auch über N_A^*.)

3. Eine neue Methode – 3

- Grundidee, 2.Teil: Es gibt eine Gruppe G_A, die transitiv auf jeder der Teilmengen $\mathcal{P}(A, q)$ operiert. Diese Gruppe wird wie folgt definiert.
- Bezeichnungen: Es sei $q_A : \mathrm{NS}(A) \to \mathbb{Z}$ die quadratische Form, die durch die halbe Selbstschnittzahl gegeben ist, d.h., es ist

$$q_A(D) = \frac{1}{2}(D.D), \quad \text{für } D \in \mathrm{NS}(A).$$

Ferner sei

$$\mathrm{Aut}(q_A) := \{\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathrm{NS}(A)) : q_A \circ \alpha = q_A\}$$

die Automorphismengruppe von q_A, und sei

$$G_A := \{\alpha \in \mathrm{Aut}(q_A) : \alpha(\mathcal{P}(A)) = \mathcal{P}(A)\}.$$

3. Eine neue Methode – 4

- Bemerkungen: (a) Es ist klar, daß G_A eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(q_A)$ ist. Ferner kann man zeigen, daß $[\mathrm{Aut}(q_A) : G_A] = 2$ ist. Genauer gilt: $\mathrm{Aut}(q) = \langle -1_{\mathrm{NS}(A)} \rangle \times G_A$.
- (b) Es sei $\varphi_A : \mathrm{Aut}(A) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{NS}(A))$ der Homomorphimus, der durch die Wirkung von $\mathrm{Aut}(A)$ auf $\mathrm{NS}(A)$ induziert wird. Dann sieht man leicht, daß

$$H_A := \varphi_A(\mathrm{Aut}(A)) \;\leq\; G_A.$$

Man beachte, daß φ_A nicht injektiv ist, denn es ist stets $-1_A \in \mathrm{Ker}(\varphi_A)$. Trotzdem gilt aber, daß

$$\mathrm{Aut}(A)\backslash\mathcal{P}^*(A) \;=\; H_A\backslash\mathcal{P}^*(A).$$

4. Die Hauptresultate

- Satz 1: Die Gruppe G_A operiert transitiv auf $\mathcal{P}(A, q)$. Ist also $\theta \in \mathcal{P}(A, q)$, so gilt

  (1) $$|\overline{\mathcal{P}}(A, q)| \ := \ |H_A \backslash \mathcal{P}(A, q)| \ = \ |H_A \backslash G_A / S_\theta|,$$

  wobei $S_\theta = \{\alpha \in G_A : \alpha(\theta) = \theta\}$ den Stabilisator von θ bezeichnet.
- Bemerkung: In manchen Fällen kann man diese Anzahl der Doppelnebenklassen direkt berechen. Im allgemeinen ist es aber einfacher, die folgende Maßformel zu benützen. Dazu sei

  $$a(\theta) \ := \ |H_A \cap S_\theta|$$

  das Gewicht von $\theta \in \mathcal{P}(A, q)$. Man sieht leicht, daß $a(h(\theta)) = a(\theta)$, für alle $h \in H_A$ ist, d.h., $a(\theta)$ hängt nur von der Bahn $\overline{\theta} = H_A\theta$ von θ ab.

4. Die Hauptresultate – 2

- Satz 2 (Maßformel): Ist $\mathcal{P}(A, q) \neq \varnothing$, so gilt

$$(2) \qquad \mathbf{M}(\overline{\mathcal{P}}(A, q)) := \sum_{\bar{\theta} \in \overline{\mathcal{P}}(A,q)} \frac{1}{a(\bar{\theta})} = \frac{[G_A : H_A]}{|\operatorname{Aut}(q)|}.$$

- Bemerkung: Die Maßformel ist besonders dann brauchbar, wenn das Gewicht $a(\theta)$ nur von q abhängt. Dies ist in der Tat in vielen Fällen der Fall, wie der folgende Satz 3 zeigt. Dazu:
- Bezeichung: Ist $q : \mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z}$ eine quadratische Form, so sei

$$r_n(q) := |\{(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{Z}^r : q(x_1, \dots, x_r) = n\}|$$

die Anzahl der Darstellungen von $n \in \mathbb{Z}$ durch q.

4. Die Hauptresultate – 3

- Satz 3: Es sei A/K ein abelsche Fläche, die nicht supersingulär ist, und sei q eine quadratische Form mit $r_1(q) = 0$. Dann gilt

  (3) $a(\theta) = a(q) := \max(1, r_4(q), 3r_4(q) - 12), \forall\theta \in \mathcal{P}(A, q)$.

  Ist also $\mathcal{P}(A, q) \neq \emptyset$, und ist $r_1(q) = 0$, so folgt, daß

  (4) $$|\overline{\mathcal{P}}(A, q)| \;=\; [G_A : H_A]a(q)/|\operatorname{Aut}(q)|.$$

- Bemerkungen: (a) Die Bedingung $r_1(q) = 0$ ist keine Einschränkung für uns, denn in der Tat gilt für $\theta \in \mathcal{P}(A)$, daß

  $$\theta \in \mathcal{P}^*(A) \quad \Leftrightarrow \quad r_1(q_\theta) = 0.$$

- (b) Ist C eine Kurve auf A, so gilt $a(\theta_C) = \frac{1}{2}|\operatorname{Aut}(C)|$. Der Beweis von Satz 3 benützt u.a. die Kenntnis der möglichen Automorphismengruppen der Kurven des Geschlechts 2.

4. Die Hauptresultate – 4

- Bezeichnungen: Für eine abelsche Fläche A/K sei

$$\Theta_A = \{q : q \sim q_\theta : \theta \in \mathcal{P}(A)\}/\sim$$

die Menge der Äquivalenzklassen derjenigen quadratischen Formen, die zu einer Form q_θ äquivalent sind, und sei

$$\Theta_A^* = \{q \in \Theta_A : r_1(q) = 0\}.$$

- Ferner sei

$$S(\Theta_A^*) := \sum_{q \in \Theta_A^*} \frac{a(q)}{|\operatorname{Aut}(q)|} := \sum_{i=1}^{n} \frac{a(q_i)}{|\operatorname{Aut}(q_i)|},$$

wobei $q_1, \ldots, q_n$ ein Repräsentantensystem der Äquivalenzklassen von Θ_A^* sind. Ist $Q \subset \Theta_A^*$ eine Teilmenge, so sei $S(Q)$ analog definiert.

4. Die Hauptresultate – 5

- Satz 4: Für eine nicht-supersinguläre abelsche Fläche A/K gilt

$$N_A^* = [G_A : H_A] S(\Theta_A^*). \tag{5}$$

5. Abelsche Produktflächen (nCM Fall)

- Bezeichnung: Ist q eine quadratische Form, so sei $\mathrm{gen}(q)$ das Geschlecht von q, d.h., $\mathrm{gen}(q)$ besteht aus der Menge der Äquivalenzklassen von Formen q', die p-adisch äquivalent zu q sind, für alle Primzahlen p (inklusiv $p = \infty$).
- Satz 5: Es sei $A = E \times E'$, wobei $\mathrm{Hom}(E, E') = \mathbb{Z}h$ und $d := \deg(h) \geq 1$ ist. Dann gilt:

  $$[G_A : H_A] \;=\; 2^{\omega(d)}, \tag{6}$$

  wobei $\omega(d) = |\{p|d : p \text{ Primzahl}\}|$ die Anzahl der verschiedenen Primdivisoren von d ist. Ferner ist

  $$\Theta_A \;=\; \mathrm{gen}(x^2 + 4dy^2), \tag{7}$$

  falls $d \not\equiv 3 \pmod 4$, und andernfalls gilt, daß

  $$\Theta_A \;=\; \mathrm{gen}(x^2 + 4dy^2) \cup \mathrm{gen}(4x^2 + 4xy + (d+1)y^2). \tag{8}$$

5. Abelsche Produktflächen (nCM Fall) – 2

- Bezeichnung: Es sei $\Delta \equiv 0, 1 \pmod 4$ eine negative quadratische Diskriminante, und sei $h(\Delta)$ die Klassenzahl von Δ, d.h., $h(\Delta)$ ist die Anzahl der (eigentlichen) Äquivalenzklassen primitiver binärer Formen der Diskiminante Δ, und sei $g(\Delta)$ die Anzahl der Geschlechter solcher Formen.
- Satz 6: In der Situation von Satz 5 gilt, daß $N_A^* = 0$, wenn $d = 1$ ist. Für $d > 1$ gilt

  $$N_A^* = 2^{\omega(d)-2}\left(\frac{h(-16d)}{g(-16d)} + c(d)\right), \tag{9}$$

  wobei $c(d) = \frac{h(-d)}{g(-d)}$, wenn $d \equiv 3 \pmod 4$, und $c(d) = -1$, wenn $d \equiv 2, 4, 6 \pmod 8$, und sonst ist $c(d) = 0$.
- Bemerkung: Dies gibt eine neue (und kürzere) Formulierung und einen neuen Beweis des Resultats von Hayashida (1965).

6. Abelsche Produktflächen (CM Fall)

- Definition: Eine abelsche Produkfläche $A \simeq E \times E'$ wird eine *CM Produktfläche* genannt, wenn E und E' isogene elliptische Kurven mit komplexer Multiplikation (CM) sind. In diesem Fall sind also $\mathrm{End}(E)$ und $\mathrm{End}(E')$ Ordnungen in einem gemeinsamen imaginär-quadratischen Körper F.
- Bezeichnung: Es seien E und E' zwei isogene elliptische CM Kurven. Die Gradfunktion

$$\deg : \mathrm{Hom}(E, E') \to \mathbb{Z}$$

auf $\mathrm{Hom}(E, E')$ wird mit $q_{E,E'}$ bezeichnet. (Es ist also $q_{E,E'}(h) = \deg(h)$.) Der Inhalt von $q_{E,E'}$ ist

$$\mathrm{cont}(q_{E,E'}) := \gcd(\{\deg(h) : h \in \mathrm{Hom}(E, E')\}).$$

6. Abelsche Produktflächen (CM Fall) – 2

- Bemerkung: Man sieht leicht, daß $q_{E,E'}$ eine positive quadratische Form vom Rang 2 ist. Außerdem kann man zeigen, daß $\mathrm{disc}(q_{E,E'}) = n^2\Delta_F$ ist, wobei Δ_F die Diskriminante von F bezeichnet und $n \in \mathbb{N}$ geeignet ist.
- Ist $A \simeq E \times E'$ eine CM Produktfläche, so gilt für ihre Schnittform q_A, daß $q_A \sim\ xy \perp (-q_{E,E'})$.
- Satz 7: Es sei $A \simeq E \times E'$ eine CM Produktfläche, und sei $\Delta = \mathrm{disc}(q_{E,E'})$ und $\Delta' = \Delta/\kappa^2$, wobei $\kappa = \mathrm{cont}(q_{E,E'})$ der Inhalt von $q_{E,E'}$ ist. Dann gilt

$$(10) \qquad [G_A : H_A] \ = \ 2^{\omega(\kappa)+1} g(\Delta')h(\Delta)h(\Delta')^{-1}.$$

6. Abelsche Produktflächen (CM Fall) – 3

- Definition: Eine Hauptpolarisierung $\theta \in \mathcal{P}(A)$ heißt *gerade*, wenn
$$(\theta.D) \equiv 0 \pmod 2, \quad \forall D \in \mathrm{NS}(A),$$
gilt; andernfalls heißt θ *ungerade*. Die Teilmenge der geraden bzw. der ungeraden $\theta \in \mathcal{P}(A)$ wird mit $\mathcal{P}(A)^{\mathrm{ev}}$ bzw. mit $\mathcal{P}(A)^{\mathrm{odd}}$ bezeichnet. Entsprechend sei
$$\Theta_A^{\mathrm{ev}} = \{q \sim q_\theta : \theta \in \mathcal{P}(A)^{\mathrm{ev}}\}, \; \Theta_A^{\mathrm{odd}} = \{q \sim q_\theta : \theta \in \mathcal{P}(A)^{\mathrm{odd}}\}.$$
- Lemma: In der Situation von Satz 7 ist $\mathcal{P}(A)^{\mathrm{ev}} \neq \varnothing \Leftrightarrow$
$$(11) \quad \Delta \equiv 0 \pmod 4 \text{ und } \exists n \equiv 3 \pmod 4 \text{ mit } r_n(q_{E,E'}) > 0.$$
- Bemerkung: Ist $q_{E,E'}$ bekannt, so kann man Bedingung (11) leicht nachprüfen. Genauer, ist $q_{E,E'} \sim ax^2 + bxy + cy^2$, so gilt (11) $\Leftrightarrow b \equiv 0 \pmod 2$ und
$$a \equiv 3 \pmod 4 \text{ oder } c \equiv 3 \pmod 4 \text{ oder } a+b+c \equiv 3 \pmod 4.$$

6. Abelsche Produktflächen (CM Fall) – 4

- Satz 8: In der Situation von Satz 7 gilt, daß

(12) $$\Theta_A^{\mathrm{odd}} = \mathrm{gen}(x^2 \perp (4q_{E,E'})).$$

- Korollar: In der der Situation von Satz 7 gelte zusätzlich, daß $\Delta \equiv 1 \pmod 2$ oder, daß $\kappa \equiv 0 \pmod 2$, oder allgemeiner, daß die Bedingung (11) nicht gilt. Dann ist

(13) $$N_A^* = 2^{\omega(\kappa)+1} g(\Delta') h(\Delta) h(\Delta')^{-1} S(\mathrm{gen}(x^2 \perp 4q_{E,E'})^*),$$

wobei $\mathrm{gen}(q)^* = \{q' \in \mathrm{gen}(q) : r_1(q') = 0\}$ ist.

6. Abelsche Produktflächen (CM Fall) – 5

- Satz 9 (H. Kir): In der der Situation von Satz 7 gelte zusätzlich, daß $\mathcal{P}(A)^{\mathrm{ev}} \neq \varnothing$. Ist $\Delta \not\equiv 16 \pmod{32}$, so ist

$$\Theta_A^{\mathrm{ev}} = \mathrm{gen}(q), \quad \forall q \in \Theta_A^{\mathrm{ev}}. \tag{14}$$

  Wenn aber $\Delta \equiv 16 \pmod{32}$ ist, so zerfällt Θ_A^{ev} in zwei verschiedene Geschlechter, d.h., es gibt zwei Formen $q_1, q_2 \in \Theta_A^{ev}$ mit $q_2 \notin \mathrm{gen}(q_1)$ derart, daß

$$\Theta_A^{\mathrm{ev}} = \mathrm{gen}(q_1) \cup \mathrm{gen}(q_2). \tag{15}$$

- Zusatz: In der obigen Situation kann man eine Form $q \in \Theta_A^{\mathrm{ev}}$ explizit angeben. Ist $q_{E.E'} \sim ax^2 + 2bxy + cy^2$ mit $a \equiv 3 \pmod 4$, und ist

$$\begin{aligned} q(x,y,z) \; &:= \; x^2 + a_1^2 a(a+4)y^2 + (b+c)z^2 \\ &\quad -2a_1 b(a+2)yz - 2bxz + a(2a_1+1)xy, \end{aligned}$$

  wobei $a_1 = \frac{a+1}{4}$ ist, so gilt, daß $4q \in \Theta_A^{\mathrm{ev}}$.
- Ist $\Delta \equiv 16 \pmod{32}$, so kann man ähnliche Formeln für q_1 und q_2 angeben.

6. Abelsche Produktflächen (CM Fall) – 6

- Zusammenfassung: Ist $A = E \times E'$ eine CM Produktfläche, so kann man mithilfe der obigen Sätze die Anzahl N_A^* explizit berechnen, wenn man $q_{E,E'}$ kennt.
- Bemerkung: Zur Berechnung der Formeln in den obigen Sätzen werden noch die folgenden (bekannten) Tatsachen aus der Theorie der positiven ternären Formen benötigt:

6. Abelsche Produktflächen (CM Fall) – 7

- 1) Jede Äquivalenzklasse von positiven ternären Formen besitzt einen eindeutigen Repräsentanten, der Eisenstein-reduziert ist. Es is leicht, eine Tabelle aller solcher Formen mit gegebener Diskiminante aufzustellen.
- 2) Nach Eisenstein (1847) und H.J.S. Smith (1867) kann man leicht nachprüfen, ob zwei gegebene positive ternäre Formen im gleichen Geschlecht liegen. (Dazu benützt man die sogenannten assoziierten Charactere der Formen.) Somit kann man das Geschlecht $\mathrm{gen}(q)$ einer Form q ausrechnen.
- 3) Nach Dickson (1930) kann man die Ordnung $|\mathrm{Aut}(q)|$ der Automorphismengruppe einer Eisenstein-reduzierten Form q berechnen. Es ergibt sich, daß $|\mathrm{Aut}(q)|$ immer 48 teilt.
- 4) Ist q eine Eisenstein-reduzierte Form, so kann man leicht $r_1(q)$ und $r_4(q)$ berechnen.

7. Tabellen

- Bezeichnungen: Es sei $A = E \times E'$ eine CM Produktfläche mit
$$q_{E,E'} \sim [a, b, c] := ax^2 + bxy + cy^2$$
Wie vorher sei $\Delta = \mathrm{disc}(q_{E,E'}) = b^2 - 4ac$ und $\Delta' = \Delta/\kappa^2$, wobei $\kappa = \gcd(a, b, c)$. Ferner sei $q' = [a/\kappa, b/\kappa, c/\kappa]$; es ist also $\Delta' = \mathrm{disc}(q')$. Außerdem sei:
$$N_A^{*,\mathrm{odd}} = |\{C \subset A : g_C = 2 \text{ und } q_{\theta_C} \in \Theta_A^{\mathrm{odd}}\}/\simeq|.$$
- Die Tabelle: In der folgenden Tabelle wird je ein Repräsentant q der $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$-Äquivalenzklassen der positiven binären quadratischen Formen mit $|\Delta| \leq 100$ angegeben.
- Für jede solche Form q gibt es (in $\mathrm{char}(K) = 0$) ein oder mehrere Paare elliptischer CM Kurven E, E' mit $q_{E,E'} \sim q$ und somit eine oder mehrere CM Produktflächen $A = E \times E'$ mit $q_A \sim xy \perp (-q)$. Genauer gesagt, gibt es genau
$$n_q = h(\Delta')/g(\Delta')$$
verschiedene CM Produktflächen A mit $q_A \sim xy \perp (-q)$.

7. Tabellen - 2

$\|\Delta'\|$	$q'_{E,E'}$	κ	$N_A^{*,\mathrm{odd}}$	N_A^*	$\|\Delta'\|$	$q'_{E,E'}$	κ	$N_A^{*,\mathrm{odd}}$	N_A^*
3	$[1,1,1]$	1	0	0	15	$[1,1,4]$	1	0	0
		2	0	0			2	2	2
		3	1	1	15	$[2,1,2]$	1	1	1
		4	0	0			2	2	2
		5	2	2	16	$[1,0,4]$	1	1	1
4	$[1,0,1]$	1	0	0			2	2	2
		2	0	0	19	$[1,1,5]$	1	1	1
		3	0	2			2	1	1
		4	1	1	20	$[1,0,5]$	1	1	1
		5	2	2			2	1	1
7	$[1,1,2]$	1	0	0	23	$[1,1,6]$	1	1	1
		2	1	1			2	3	3
		3	4	4	24	$[1,0,6]$	1	0	1
8	$[1,0,2]$	1	0	1			2	2	2
		2	0	0	24	$[2,0,3]$	1	1	2
		3	2	4			2	0	0
11	$[1,1,3]$	1	1	1	27	$[1,1,7]$	1	1	1
		2	0	0	28	$[1,0,7]$	1	1	2
		3	6	6	31	$[1,1,8]$	1	1	1
12	$[1,0,3]$	1	0	1	32	$[1,0,8]$	1	2	2
		2	2	2	32	$[3,2,3]$	1	1	3

7. Tabellen - 3

$\lvert\Delta'\rvert$	$q'_{E,E'}$	κ	$N_A^{*,\mathrm{odd}}$	N_A^*	$\lvert\Delta'\rvert$	$q'_{E,E'}$	κ	$N_A^{*,\mathrm{odd}}$	N_A^*
35	$[1,1,9]$	1	2	2	55	$[1,1,14]$	1	2	2
35	$[3,1,3]$	1	3	3	55	$[2,1,7]$	1	2	2
36	$[1,0,9]$	1	1	1	55	$[4,3,4]$	1	2	2
36	$[2,2,5]$	1	2	2	56	$[1,0,14]$	1	1	3
39	$[1,1,10]$	1	1	1	56	$[2,0,7]$	1	1	3
39	$[2,1,5]$	1	2	2	56	$[3,2,5]$	1	2	4
39	$[3,3,4]$	1	1	1	59	$[1,1,15]$	1	4	4
40	$[1,0,10]$	1	1	2	59	$[3,1,5]$	1	4	4
40	$[2,0,5]$	1	1	2	60	$[1,0,15]$	1	2	4
43	$[1,1,11]$	1	2	2	60	$[3,0,5]$	1	3	5
44	$[1,0,11]$	1	1	3	63	$[1,1,16]$	1	1	1
44	$[3,2,4]$	1	1	3	63	$[2,1,8]$	1	3	3
47	$[1,1,12]$	1	2	2	63	$[4,1,4]$	1	1	1
47	$[2,1,6]$	1	2	2	64	$[1,0,16]$	1	3	3
47	$[3,1,4]$	1	2	2	64	$[4,4,5]$	1	3	3
48	$[1,0,12]$	1	2	2	67	$[1,1,17]$	1	3	3
48	$[3,0,4]$	1	1	3	68	$[1,0,17]$	1	3	3
51	$[1,1,13]$	1	2	2	68	$[3,2,6]$	1	1	5
51	$[3,3,5]$	1	4	4	68	$[2,2,9]$	1	3	3
52	$[1,0,13]$	1	2	2	71	$[1,1,18]$	1	3	3
52	$[2,2,7]$	1	1	3	71	$[2,1,9]$	1	3	3

7. Tabellen - 4

$\lvert\Delta'\rvert$	$q'_{E,E'}$	κ	$N_A^{*,\mathrm{odd}}$	N_A^*	$\lvert\Delta'\rvert$	$q'_{E,E'}$	κ	$N_A^{*,\mathrm{odd}}$	N_A^*
71	$[3,1,6]$	1	3	3	87	$[3,3,8]$	1	5	5
71	$[4,3,5]$	1	3	3	87	$[4,3,6]$	1	2	2
72	$[1,0,18]$	1	1	2	88	$[1,0,22]$	1	2	4
72	$[2,0,9]$	1	3	4	88	$[2,0,11]$	1	3	4
75	$[1,1,19]$	1	3	3	91	$[1,1,23]$	1	4	4
75	$[3,3,7]$	1	3	3	91	$[5,3,5]$	1	5	5
76	$[1,0,19]$	1	2	4	92	$[1,0,23]$	1	4	7
76	$[4,2,5]$	1	2	4	92	$[3,2,8]$	1	4	7
79	$[1,1,20]$	1	3	3	95	$[1,1,24]$	1	4	4
79	$[2,1,10]$	1	3	3	95	$[2,1,12]$	1	4	4
79	$[4,1,5]$	1	3	3	95	$[3,1,8]$	1	4	4
80	$[1,0,20]$	1	5	5	95	$[4,1,6]$	1	4	4
80	$[3,2,7]$	1	2	6	95	$[5,5,6]$	1	4	4
80	$[4,0,5]$	1	5	5	96	$[1,0,24]$	1	4	4
83	$[1,1,21]$	1	5	5	96	$[3,0,8]$	1	4	8
83	$[3,1,7]$	1	5	5	96	$[4,4,7]$	1	2	6
84	$[1,0,21]$	1	2	2	96	$[5,2,5]$	1	6	6
84	$[2,2,11]$	1	2	6	99	$[1,1,25]$	1	3	3
84	$[3,0,7]$	1	1	5	99	$[5,1,5]$	1	6	6
84	$[5,4,5]$	1	5	5	100	$[1,0,25]$	1	4	4
87	$[1,1,22]$	1	2	2	100	$[2,2,13]$	1	3	3
87	$[2,1,11]$	1	5	5					