Modulkurven auf Humbertflächen

Ernst Kani
Queen's University

Universität Heidelberg
4. Mai 2019

Übersicht

1. Einleitung

- Es sei:

$M_2/\mathbb{C}$	der Modulraum der Geschlecht 2 Kurven $X/\mathbb{C}$, d.h.
$M_2(\mathbb{C})$	besteht aus der Menge der Isomorphieklassen solcher Kurven $X/\mathbb{C}$, und
$A_2/\mathbb{C}$	der Modulraum der hauptpol. abelschen Flächen, d.h.
$A_2(\mathbb{C})$	besteht aus der Menge der Isomorphieklassen der Paare (A,λ), wobei A eine abelsche Fläche und $\lambda : A \xrightarrow{\sim} \hat{A}$ eine Hauptpolarisierung ist.

- Bemerkung: Nach Torelli können wir $M_2(\mathbb{C})$ mit einer Teilmenge von $A_2(\mathbb{C})$ identifizieren.
- Humbert (1900): konstruiert zu jeder positven Zahl $n \equiv 0, 1 \pmod 4$ eine irreduzible Fläche $H_n \subset A_2$, die jetzt eine Humbertfläche genannt wird. Humbert beweist:

  (i) $\mathrm{End}(A) \neq \mathbb{Z} \Leftrightarrow (A,\lambda) \in H_n$, für ein n;

  (ii) $M_2 = A_2 \setminus H_1$;

1. Einleitung – 2

- Bemerkung: Von besonderem Interesse ist der Fall, daß $n = N^2$ ein Quadrat ist, denn

$$M_2 \cap H_{N^2}$$

klassifiziert diejenigen Kurven $X/\mathbb{C}$, die einen (minimalen) Morphismus

$$f : X \to E$$

vom Grad N auf eine elliptische Kurve $E/\mathbb{C}$ besitzen.

- Ferner: ist $N_1 \neq N_2$, so klassifiziert der Durchschnitt

$$M_2 \cap H_{N_1^2} \cap H_{N_2^2}$$

diejenigen Kurven $X/\mathbb{C}$, die zwei minimale Morphismen $f_i : X \to E_i$ vom Grad N_i auf elliptische Kurven $E_i/\mathbb{C}$ besitzen.

1. Einleitung – 3

- Daher ist es von Interesse, die Komponenten des Durchschnitts zweier Humbertflächen zu beschreiben.
- Satz 1: Es sei $M \neq N^2$. Dann ist $H_M \cap H_{N^2}$ eine endliche Vereinigung von Modulkurven auf H_{N^2}.
- Zusatz: Die in $H_M \cap H_{N^2}$ vorkommenden Modulkurven können mithilfe der Theorie der binären quadratischen Formen explizit beschrieben werden.

1. Einleitung – 4

- Bemerkung: Die Beschreibung der Komponenten des Durchschnitts besteht aus zwei Teilen:

  (i) Eine Zerlegung des Durchschnitts in "verallgemeinerte Humbert Schemata" $H(q)$:

  $$H_M \cap H_{N^2} = \bigcup H(q),$$

  wobei die Vereinigung über alle Äquivalezklassen positiver binärer quadratischer Formen erstreckt ist, die sowohl N^2 wie auch M primitiv repräsentieren. Diese können mit Hilfe der Theorie der binären quadratischen Formen genau bestimmt werden.

  (ii) Jedes $H(q) \subset H_{N^2}$ ist eine Vereinigung von gewissen (irreduziblen) Modulkurven, die auf H_{N^2} liegen.

1. Einleitung – 5

- Das Ziel dieses Vortrags ist, die Modulkurven, die auf H_{N^2} liegen, genau zu beschreiben bzw. zu klassifizieren.
- Leider gelingt eine vollständige Klassifizierung bisher nur im Fall, daß N eine Primzahl ist. Wenn man aber H_{N^2} durch ihre Normalisierung $\tilde{H}_{N^2}$ ersetzt, so lassen sich die darauf liegenden Modulkurven relativ leicht klassifizieren.

2. Modulkurven: Strategie

- Es sei: $X(N)/\mathbb{C}$ die affine Modulkurve der Stufe N; d.h.,
  $X(N)_{an} = \Gamma(N)\backslash\mathfrak{H}$.
  Auf $X(N)$ operiert die Gruppe $G_N = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$.
- Nach Klein, Girster und Hurwitz gibt es auf der Produktfläche

$$Y(N) = X(N) \times X(N)$$

  eine Vielfalt von Modulkurven, die sogenannten *Modular-korrespondenzen* $\tilde{T}_\alpha$ von $X(N)$.
- Satz 2 ([FK]): Die Produktfläche $Y(N)$ überlagert die Humbertfläche H_{N_2}; es gibt also einen endlichen, surjektiven Morphismus

$$\tilde{\beta}_N : Y(N) \to H_{N^2}.$$

- Bemerkung: Der Morphism $\tilde{\beta}_N$ ist eine Variante der Grundkonstruktion ("basic construction") von [FK].

2. Modulkurven: Strategie – 2

- Definition: Eine *Modulkurve auf H_{N^2}* ist das Bild $\bar{T}_\alpha := \tilde{\beta}_N(\tilde{T}_\alpha)$ einer Modularkorrespondenz $\tilde{T}_\alpha$ auf $Y(N)$.
- Strategie: Anstelle die Modulkurven direkt auf H_{N^2} zu charakterisieren, wollen wir schrittweise vorgehen.
- Hierzu benützen wir die Tatsache, daß der Morphismus $\tilde{\beta}_N$ über einen Quotientenmorphismus

$$\Phi_N : Y(N) \to Z_N := Y(N)/\Delta_{N,-1}$$

faktorisiert, d.h., es gilt

$$\tilde{\beta}_N = \beta_N \circ \Phi_N : Y(N) \overset{\Phi_N}{\to} Z_N \overset{\beta_N}{\to} H_{N^2}.$$

Hierbei ist $\Delta_{N,-1}$ eine geeignete Untergruppe von $G_N \times G_N$.

2. Modulkurven: Strategie – 3

- Ferner besitzt Z_N eine Involution $w_N \in \mathrm{Aut}(Z_N)$ mit der Eigenschaft, daß β_N über den Quotientenmorphismus

$$\pi_N : Z_N \to Z_N^{sym} := Z_N/\langle w_N\rangle$$

  factorisiert. Es gilt also

$$\beta_N = \nu_N \circ \pi_N : Z_N \xrightarrow{\pi_N} Z_N^{sym} \xrightarrow{\nu_N} H_{N^2}.$$

- Satz 3: $\nu_N : Z_N^{sym} \to H_{N^2}$ ist die Normalisierung der Humbertfläche H_{N^2}.
- Wir werden also nacheinander die Modulkurven auf $Y(N)$, auf Z_N und auf Z_N^{sym} klassifizieren, und dann diese Information benützen, um eine Einsicht über die Modulkurven auf H_{N^2} zu bekommen.

3. Die Modulkurven auf $Y(N)$

- Bezeichnung: Es sei $\mathcal{M}_d$ die Menge der primitiven 2×2 Matrizen der Determinante $d \geq 1$. Es ist also

$$\mathcal{M}_d = \Gamma(1)\alpha_d\Gamma(1), \quad \text{mit } \Gamma(1) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \alpha_d = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right).$$

- Resultat (Klein): Ist $d \geq 1$, so gibt es zu jedem $\alpha \in \mathcal{M}_d$ eine irreduzible Kurve

$$\tilde{T}_\alpha = \tilde{T}_\alpha^N \subset X(N) \times X(N),$$

die nur von der Doppelnebenklasse $\pm\Gamma(N)\alpha\Gamma(N)$ abhängt.

- Bemerkung: Analytisch wird $\tilde{T}_\alpha^N$ so konstruiert: Es sei $\Gamma_\alpha \subset \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ der Graphen von α, wobei α als Moebius-transformation auf der oberen Halbebene $\mathfrak{H}$ betrachtet wird. Dann ist $\tilde{T}_\alpha^N$ das Bild von Γ_α bezüglich der Abbildung

$$\mathfrak{H} \times \mathfrak{H} \to (\Gamma(N)\backslash\mathfrak{H}) \times (\Gamma(N)\backslash\mathfrak{H}) = Y(N)$$

3. Die Modulkurven auf $Y(N) - 2$

- Bezeichnung: Es sei

$$\tilde{\mathcal{T}}_d^N = \{\tilde{T}_\alpha^N : \alpha \in \mathcal{M}_d\}$$

die Menge der Modulkurven der Determinante d.

- Bemerkung. 1) Man kann zeigen, daß die Gruppe $G_N \times G_N$ die Kurven in $\tilde{\mathcal{T}}_d$ transitiv permutiert. Somit sind also alle $\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_d$ zueinander isomorph.

  2) Ist $N \geq 3$, so gilt

$$|\tilde{\mathcal{T}}_d^N| = \frac{N\phi(N)^2\psi(N)\psi(d)}{2\psi(Nd)},$$

wobei $\psi(N) = N\prod_{p|N}(1+\frac{1}{p})$ die Dedekindsche Funktion ist.

3. Die Modulkurven auf $Y(N)$ – 3

- Bezeichnung: Es sei $\overline{\mathcal{M}}_d^N$ die Menge der N-primitiven Matrizen $\alpha \in M_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ mit $\det(\alpha) \equiv d \pmod N$, und sei

$$r_N : M_2(\mathbb{Z}) \to M_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$$

  die Abbildung, die durch die Reduktion mod N definiert wird.
- Satz 4: Es seien $\alpha_i \in \mathcal{M}_{d_i}$, für $i = 1, 2$. Dann gilt:

$$\tilde{T}_{\alpha_1}^N = \tilde{T}_{\alpha_2}^N \Leftrightarrow d_1 = d_2 \text{ und } r_N(\alpha_1) = \pm r_N(\alpha_2).$$

  Ferner liefert die Zuordnung $\alpha \mapsto \pm r_N(\alpha)$ für jedes $d \geq 1$ eine Bijektion

$$\tilde{\gamma}_d^N : \tilde{\mathcal{T}}_d^N \xrightarrow{\sim} \overline{\mathcal{M}}_d^N/(\pm I).$$

4. Die Modulkurven auf Z_N

- Bezeichnung. Für $\alpha \in \mathcal{M}_d$ sei

$$T_\alpha = T_\alpha^N := \Phi_N(\tilde{T}_\alpha^N) \subset Z_N$$

das Bild der Modularkorrespondenz $\tilde{T}_\alpha^N$. Ferner sei

$$\mathcal{T}_d^N = \{T_\alpha^N : \alpha \in \mathcal{M}_d\} \text{ und } \mathcal{T}^N = \bigcup_{d \geq 1} \mathcal{T}_d^N.$$

- Satz 5: Es seien $\alpha_i \in \mathcal{M}_{d_i}$, für $i = 1, 2$. Dann gilt:

$$T_{\alpha_1}^N = T_{\alpha_2}^N \Leftrightarrow d_1 = d_2 \text{ und } \mathfrak{c}_N(r_N(\beta\alpha_1)) = \pm\mathfrak{c}_N(r_N(\beta\alpha_2)),$$

wobei

$$\beta := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{c}_N(\bar{\alpha}) = \{\gamma\bar{\alpha}\gamma^{-1} : \gamma \in G_N\}$$

die G_N-Konjugiertenklasse von $\bar{\alpha} \in M_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ bezeichnet.

4. Die Modulkurven auf Z_N – 2

- Korollar. Die Zuordnung $\alpha \mapsto \pm r_N(\beta\alpha)$ liefert für jedes $d \geq 1$ eine Bijektion

$$\gamma_d^N : \mathcal{T}_d^N \ \xrightarrow{\sim}\ \mathfrak{c}_N(\overline{\mathcal{M}}_{-d}^N)/(\pm I),$$

wobei $\mathfrak{c}_N(\overline{\mathcal{M}}_{-d}^N) = \{\mathfrak{c}_N(\bar{\alpha}) : \bar{\alpha} \in \overline{\mathcal{M}}_{-d}^N\}$ die Menge der G_N-Konjugiertenklassen in $\overline{\mathcal{M}}_{-d}^N$ bezeichnet.

- Bemerkung: Durch eine Erweiterung der Resultate von Nobs[No] (1977) kann man die obigen G_N-Konjugiertenklassen genau beschreiben. Leider ist diese Beschreibung aber recht kompliziert. Wir werden daher später eine andere Beschreibung mit Hilfe von quadratischen Formen geben.

5. Die Modulkurven auf Z_N^{sym}

- Bezeichnung. Für $\alpha \in \mathcal{M}_d$ sei

$$T_\alpha^{sym} = T_\alpha^{N,sym} := \pi_N(T_\alpha^N) = \pi_N \Phi_N(\tilde{T}_\alpha^N) \subset Z_N^{sym}$$

das Bild der Modularkorrespondenz $\tilde{T}_\alpha^N$. Ferner sei

$$\mathcal{T}_d^{N,sym} = \{T_\alpha^{N,sym} : \alpha \in \mathcal{M}_d\} \text{ und } \mathcal{T}^{N,sym} = \bigcup_{d \geq 1} \mathcal{T}_d^N.$$

- Satz 6: Jede Modulkurve T_α^N is w_N-stabil, d.h.,

$$w_N(T_\alpha^N) = T_\alpha^N, \quad \forall \alpha \in \mathcal{M}_d,$$

und daher liefert die Regel $T_\alpha \mapsto T_\alpha^{sym}$ eine Bijektion

$$\mathcal{T}^N \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}^{N,sym}.$$

5. Die Modulkurven auf Z_N^{sym} – 2

- Bemerkung: 1) Somit haben die Modulkurven auf Z_N^{sym} die gleiche Klassifikation wie die auf Z_N, d.h., ist $\alpha_i \in \mathcal{M}_{d_i}$, so gilt

  $$T_{\alpha_1}^{N,sym} = T_{\alpha_2}^{N,sym} \Leftrightarrow d_1 = d_2 \text{ und } \mathfrak{c}_N(r_N(\beta\alpha_1)) = \pm\mathfrak{c}_N(r_N(\beta\alpha_2)).$$

  2) Der Grund, daß die Modulkurven w_N-stabil sind, liegt an zwei Tatsachen. Einerseits rechnet man leicht nach, daß

  $$w_N(T_\alpha^N) \;=\; T_{\alpha^*}^N$$

  ist, wobei $\alpha^* = d\alpha^{-1}$ die adjungierte Matrix von $\alpha \in \mathcal{M}_d$ ist. Andererseits folgt mithilfe der Resultate von Nobs[No], daß

  $$\mathfrak{c}_N(r_N(\beta\alpha^*)) = -\mathfrak{c}_N(r_N(\beta\alpha)),$$

  und daher folgt die Invarianz von T_α^N aus Satz 5.

6. Die quadratische Form einer Modulkurve

- Bezeichnung: Sei $q = [a, b, c]$ die binäre quadratische Form

$$q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2,$$

und sei $Q(N)$ die Menge der positiven Formen $q = [a, b, c]$ mit $a, b, c \in \mathbb{Z}$, die die folgenden Eigenschaften besitzen:

(i) $q \to N^2$, d.h., $\exists x, y \in \mathbb{Z},\ \mathrm{ggT}(x, y) = 1$ mit $q(x, y) = N^2$;

(ii) $q(x, y) \equiv 0, 1 \pmod 4$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$.

Ist $m|N$ und $d \geq 1$, so sei $Q(N, m, d)$ die Teilmenge der $q \in Q(N)$ mit

$$\mathrm{disc}(q) = -16m^2 d, \text{ und } \mathrm{ggT}(N/m, d) = 1.$$

- Lemma 1: $Q(N)$ ist die disjunkte Vereinigung der Teilmengen $Q(N, m, d)$, wobei $d \geq 1$, $m|N$ und $\mathrm{ggT}(N/m, d) = 1$.

6. Die quadratische Form einer Modulkurve – 2

- Bezeichnung: Ist $\alpha \in \mathcal{M}_d$ und $N \geq 1$, so sei

$$q_{\alpha,N} = [N^2, 2mt, m^2(t^2+4d)/N^2].$$

Hierbei ist $t = \mathrm{Spur}(\beta\alpha)$, wobei $\beta = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, und die Zahl $m|N$ wird durch folgende Formel bestimmt:

$$\frac{N}{m} = \mathrm{ggT}(x-w, y, z, N), \quad \text{falls } \beta\alpha = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right).$$

- Lemma 2: $q_{\alpha,N} \in Q(N,m,d)$.
- Bemerkung: Die Gruppe $\Gamma_\pm = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ operiert (von rechts) auf $Q(N)$ und auch auf den Teilmengen $Q(N,m,d)$.
- Satz 7: Die Regel $\alpha \mapsto q_{\alpha,N}\Gamma_\pm$ definiert eine surjektive Abbildung

$$q^N : \mathcal{T}^N \to \bar{Q}(N) := Q(N)/\Gamma_\pm.$$

6. Die quadratische Form einer Modulkurve – 3

- Bezeichnung: Für $q \in Q(N)$ sei

$$\mathcal{T}^N(q) = \{ T^N_\alpha \in \mathcal{T}^N : q_{\alpha,N} \sim q \}$$

die Faser der Abbildung q^N über $q\Gamma_\pm \in \bar{Q}(N)$. Hierbei bedeutet die Äquivalenz $q_1 \sim q_2$, daß $q_1\Gamma_\pm = q_2\Gamma_\pm$ ist. Ferner sei

$$\mathcal{H}_N(q) = \bigcup_{T \in \mathcal{T}^N(q)} T.$$

- Bemerkung: Ist $q \in Q(N, m, d)$, so folgt aus Lemma 2, daß

$$\mathcal{T}^N(q) \subset \mathcal{T}^N_d.$$

Somit besteht also $\mathcal{T}^N(q)$ aus endlich vielen Modulkurven, und daher ist $\mathcal{H}_N(q)$ eine (reduzible) Kurve auf Z_N.

6. Die quadratische Form einer Modulkurve – 4

- Bezeichnung: Ist $q = [a, b, c] \in Q(N)$, so sei $c(q) = \text{ggT}(a, b, c)$ der Inhalt von q und sei

$$P_{N^2}(q) = \{(x, y) \in Z^2 : \text{ggT}(x, y) = 1, q(x, y) = N^2\}$$

  die Menge der primitiven Darstellungen von N^2 durch q. Ferner sei

$$\bar{P}_{N^2}(q) = \text{Aut}_{\pm}(q) \backslash P_{N^2}(q)$$

  die Bahnenmenge von $P_{N^2}(q)$ unter Wirkung der Automorphismengruppe $\text{Aut}_{\pm}(q) = \{\gamma \in \Gamma_{\pm} : q\gamma = q\}$.

- Satz 8: Es sei $N \equiv 1 \pmod 2$, und $q \in Q(N, m, d)$. Ist $q \not\sim [N^2, 0, 4Nd']$, so gilt

$$|\mathcal{T}^N(q)| = 2^{\omega(\text{ggT}(m, c(q)))} \cdot |\bar{P}_{N^2}(q)|,$$

  wobei $\omega(c) = |\{p|c\}|$. Ferner können die in $\mathcal{T}^N(q)$ liegenden Modulkurven genau beschrieben werden.

6. Die quadratische Form einer Modulkurve – 5

- Zusatz: Ist $N \equiv 1 \pmod 2$, und $q \sim [N^2, 0, 4Nd']$, so gilt

$$|\mathcal{T}^N(q)| = \frac{1}{e_N} 2^{\omega(\mathrm{ggT}(m, c(q)))} \cdot |\bar{P}_{N^2}(q)|,$$

wobei $e_N = 1$, wenn $p \equiv 1 \pmod 4, \forall p|N$ und $e_N = 2$ sonst. Ferner können die in $\mathcal{T}^N(q)$ liegenden Modulkurven genau beschrieben werden.
- Bemerkung: Ist N gerade, so sind die Formeln für $|\mathcal{T}^n(q)|$ weitaus komplizierter.

7. Die verfeinerte Humbert-Invariante

- Bezeichnung: Es sei $(A, \lambda) \in A_2(\mathbb{C})$ eine hauptpolarisierte abelsche Fläche. Dann ist $\lambda = \phi_\theta$, für eine Divisorklasse $\theta \in \mathrm{NS}(A) = \mathrm{Div}(A)/\equiv$ der Néron-Severi Gruppe. Setze

$$\tilde{q}_{(A,\lambda)}(D) = (D.\theta)^2 - 2(D.D), \quad \forall D \in \mathrm{NS}(A).$$

  Nach dem Hodgeschen Index Satz definiert $\tilde{q}_{(A,\lambda)}$ eine positiv-definite quadratische Form $q_{(A,\lambda)}$ auf der Quotientengruppe

$$\mathrm{NS}(A, \lambda) := \mathrm{NS}(A)/\mathbb{Z}\theta.$$

- Definition: Die Äquivalenzklasse der quadratische Form $q_{(A,\lambda)}$ heißt die *verfeinerte Humbert-Invariante* von (A, λ).

7. Die verfeinerte Humbert-Invariante - 2

- Prinzip: Man kann die verfeinerte Humbert-Invariante $q_{(A,\lambda)}$ dazu benützen, um abgeschlossene Unterschemata $H(q)$ des Modulraums A_2 zu definieren.
- Definition: Es seien (M_1, q_1) und (M_2, q_2) zwei quadratische $\mathbb{Z}$-Moduln. Dann *repräsentiert* (M_1, q_1) den Modul (M_2, q_2) *primitiv,* falls es eine Injektion $f : M_2 \to M_1$ gibt derart, daß

  $$q_1 \circ f = q_2 \quad \text{und} \quad M_1/f(M_2) \text{ torsionfrei ist.}$$

  Ist dies der Fall, so schreibt man $q_1 \to q_2$.
- Bezeichnung: Ist q eine ganze, positiv-definite quadratische Form (auf $\mathbb{Z}^r$), so sei

  $$H(q) := \{(A, \lambda) \in A_2(\mathbb{C}) : q_{(A,\lambda)} \to q\}.$$

7. Die verfeinerte Humbert-Invariante - 3

- Bemerkung: Die Teilmengen $H(q)$ können als Verallgemeinerungen der Humbertflächen H_n betrachtet werden, denn es gilt

$$H_n = H(nx^2).$$

- Satz 9: Es sei $q \in Q(N)$. Dann ist $H(q) \subset H_{N^2}$ und es gilt

$$\nu_N^{-1}(H(q)) = \mathcal{H}_N(q).$$

- Korollar: Ist $q \in Q(N)$, so gilt

$$H(q) = \bigcup_{\bar{T} \in \bar{\mathcal{T}}^N(q)} \bar{T},$$

  wobei $\bar{\mathcal{T}}^N(q) = \{\beta_N(T_\alpha^N) : T_\alpha^N \in \mathcal{T}^N(q)\}$. Daher ist $H(q)$ eine Vereinigung von Modulkurven auf H_{N^2}.

- Bemerkung: Leider ist die Abbildung $T_\alpha^N \mapsto \bar{T}_\alpha^N$ i.a. nicht injektiv, und daher bestimmt die obige Formel nicht die Anzahl der irreduziblen Komponenten von $H(q)$.

8. Die Fasern von β_N und ν_N

- Bezeichnung: Es sei $H_{N^2}^{ncm} \subset H_{N^2}$ die Menge der Punkte von H_{N^2}, die keine CM-Punkte sind. Somit gilt also für alle $(A, \lambda) \in H_{N^2}^{ncm}$, daß $q_{(A,\lambda)}$ eine binäre quadratische Form ist.
- Satz 10: Es sei $(A, \lambda) \in H_{N^2}^{ncm}$ und $q = q_{(A,\lambda)}$. Dann gilt

$$|\beta_N^{-1}((A, \lambda))| = \frac{1}{m(q)} |P_{N^2}(q)|,$$

  wobei $m(q) \leq 6$. Ferner ist $m(q) = 1$, wenn $q \not\sim 1, 4$.
- Bemerkungen: 1) Der Beweis dieses Satzes benötigt einerseits ein genaues Studium der Grundkonstruktion β_N, sowie eine penible Untersuchung der Wirkung von Automorphismen auf Kurven und auf der Néron-Severi Gruppe der zugehörigen Jacobischen Fläche.

  2) Der genaue Wert von $m(q)$ hängt nur von der Äquivalenzklasse von q ab, und kann auch in den Ausnahmefällen genau bestimmt werden.

8. Die Fasern von β_N und ν_N – 2

- Bezeichnung: Es sei

$$U_N = \{z \in H_{N^2} : |\nu_N^{-1}(z)| = 1\}$$

die Menge der "unibranched" Punkte auf H_{N^2}.

- Satz 11: Es sei $q \in Q(N, m, d)$ mit $q \not\to 1, 4$. Ferner sei entweder $d > 1$ oder $2 \nmid N$. Dann gilt

$$(1) \qquad H(q) \cap H_{N^2}^{ncm} \subset U_N \quad \Leftrightarrow \quad |P_{N^2}(q)| = 2.$$

- Korollar. Für $N \geq 3$ ist stes $U_N \neq H_{N^2}$, also ist insbesondere H_{N^2} nicht normal.

- Beweis: Sei $2 \nmid N$, und betrachte $q = [N^2, 2, N^2] \in Q(N)$. Dann $q \not\to 1, 4$, aber $|P_{N^2}(q)| = 4$. Daher ist nach Satz 11 $H(q) \cap H_{N^2}^{ncm} \not\subset U_N$, also ist $U_N \neq H_{N^2}$.
Für $2|N$ betrachte man $q := [N^2, 0, N^2] \in Q(N)$.

8. Die Fasern von β_N und ν_N – 3

- Bemerkung: Ist $q \in Q(N, m, d)$ und ist

$$d > N^4/(4m^2),$$

so zeigt die Reduktionstheorie der quadratischen Formen, daß q die Bedingung $|P_{N^2}(q)| = 2$ erfüllt.

Daher gibt es nur endlich viele $H(q)$, die die Bedingingen von Satz 11 nicht erfüllen. Es stellt heraus, daß diese dann voll im Führer C_N von H_{N^2} liegen, d.h., es gilt

$$H(q) \subset C_N.$$

9. Der Fall einer Primzahl $N > 2$

- Satz 12: Ist $q \in Q(N)$, wobei $N > 2$ eine Primzahl ist, so gilt
$$|\mathcal{T}^N(q)| \leq 2.$$
Falls $N \equiv 1 \pmod 4$, so ist
$$\mathcal{H}_N(q) \text{ irreduzibel} \quad \Leftrightarrow \quad c(q) = 1.$$
Falls $N \equiv 3 \pmod 4$, so ist
$$\mathcal{H}_N(q) \text{ irreduzibel} \quad \Leftrightarrow \quad c(q) = 1 \text{ oder } q \sim [N^2, 0, 4Nd'].$$
- Satz 13: Es sei $q \in Q(N, N, d)$, wobei $N > 2$ eine Primzahl ist. Wenn $|P_{N^2}(q)| > 2$ ist, so ist $c(q) > 1$ und $N \nmid d$. Ferner ist
$$H(q) \text{ irreduzibel} \quad \Leftrightarrow \quad N \equiv 3 \pmod 4.$$

9. Der Fall einer Primzahl $N > 2$ – 2

- Satz 14: Ist $N \equiv 1 \pmod 4$, so bildet β_N die Menge $\mathcal{T}^N$ der Modulkurven auf Z_N bijektiv auf die Menge $\bar{\mathcal{T}}^N$ der Modulkurven auf H_{N^2} ab, d.h.,

$$\mathcal{T}^N \quad \stackrel{\sim}{\to} \quad \bar{\mathcal{T}}^N.$$

  Somit gilt also, daß $H(q)$ genau dann irreduzibel ist, wenn q primitiv ist, d.h., wenn $c(q) = 1$ ist.
- Satz 15: Es sei $N \equiv 3 \pmod 4$ eine Primzahl. Dann ist $H(q)$ genau dann reduzibel, wenn $c(q) > 1$, $|P_{N^2}(q)| = 2$ und $q \not\sim [N^2, 0, 4d]$.
- Korollar: Es sei $N \equiv 3 \pmod 4$ eine Primzahl. Dann bildet β_N die Menge $\mathcal{T}^N(q)$ nicht injectiv nach $\bar{\mathcal{T}}^N$ ab, genau dann, wenn $c(q) > 1$ und $|P_{N^2}(q)| > 2$ ist.

9. Der Fall einer Primzahl $N > 2$ – 3

- Beispiel: $N = 3, d = 2, q = [9, 6, 9]$

$$\mathcal{H}_N(q) = T^N_{\alpha_1} \cup T^N_{\alpha_2},\ \alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es ist $T^N_{\alpha_1} \neq T^N_{\alpha_2}$, aber auf H_{N^2} gilt

$$H(q) = \bar{T}^N_{\alpha_1} = \bar{T}^N_{\alpha_2}.$$

10. Literatur

[FK] G. Frey, E.K., Curves of genus 2 and associated Hurwitz spaces. *Contemp. Math.* **487** (2009), 33–81.

[EC] E. K., Elliptic curves on abelian surfaces. *Manusc. math.* **84** (1994), 199–223.

[MS] E. K., The moduli spaces of Jacobians isomorphic to a product of two elliptic curves. *Collect. Math.* **67** (2016), 21–54.

[ES] E. K., Elliptic subcovers of a curve of genus 2. II. The refined Humbert Invariant. *J. Number Th.* **193** (2018), 302–335.

[No] A. Nobs, Die irreduziblen Darstellungen der Gruppen $SL_2(\mathbb{Z}_p)$, insbesondere $SL_2(\mathbb{Z}_2)$. 1. Teil. *Comment. Math. Helvetici* **39** (1977), 465–489.