Definition. A field K is called PpC if every absolutely irreducible variety V defined over K has a rational point provided it has a simple $\overline{K}$-point for each p-adic closure $\overline{K}$ of K.

Theorem. If K is PpC and L is an algebraic extension of K such that there exist epimorphisms $\Gamma \xrightarrow{\psi} G(L) \longrightarrow \overline{\Gamma}$, then L is p-adically closed.

Ernst KANI

Arithmetische Flächen und Potentialtheorie

Die Arakelovsche Theorie der arithmetischen Flächen basiert auf der Erkenntnis, daß die klassische Potentialtheorie (für Riemannsche Flächen) ein archimedisches Analogon zur Theorie der Schnittpaarung auf Kurven über diskreten Bewertungsringen liefert. In diesem Vortrag wurde nun umgekehrt gezeigt, wie man aus einer (geeigneten) Theorie der Schnittpaarungen Potentialtheorie für Kurven über nichtarchimedischen Körpern gewinnen kann.

a) Integration auf Kurven über nichtarchimedischen Körpern.

Es sei: K ein Körper vollständig bzl. des nichtarchimedischen (n.a.) Absolutbetrags $|\ |_v$

C eine projektive Kurve über K, betrachtet als analytische Varietät (im Sinne der Tateschen rigiden Analysis).

$\pi : C \to \overline{C}$ eine Reduktionsabbildung (gegeben durch eine formale Überdeckung (U_i))

$\overline{C} = \overline{C}_1 \cup .. \cup \overline{C}_n$ Zerlegung von $\overline{C}$ in irreduzible Komponenten.

B(C) boolsche Algebra, erzeugt von allen affinoiden Teilbereichen von C

Setze: $\mu_i(B) = \begin{cases} 1 & \text{falls (Zariski-Abschluß von } \pi(B)) \ \overline{C_i} \text{ enthält} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Satz 1: $\mu_i : B(C) \to \mathbb{R}$ ist additiv

Korollar: $V_i(f) := \int \log|f|_v \, d\mu_i$ ist eine Bewertung auf $F = K(C)$.

b) Schnittpaarungen

Sei $\mathrm{Div}(C,\underline{V}) = \bigoplus_{P\in C} \mathbb{Z}P \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{R}V_i$ die Divisorengruppe zum "Modell" $(C,\underline{V})$.

Eine Abbidlung

$$(\ ,\ ) \text{ " } \mathrm{Div}(C,\underline{V}) \times \mathrm{Div}(C,\underline{V}) \to \mathbb{R}$$

heißt Schnittpaarung, falls gilt:

(1) $(\ ,\ )$ bilinear (falls definiert)

(2) $(D,E) \geq 0$, falls $D \geq 0$, $E \geq 0$ disjunkt

(3) $a_{ij} := (V_i,V_j) > 0$ genau dann, wenn $\overline{C_i} \cap \overline{C_j} \neq \emptyset$, $(i \neq j)$

(4) $h_i(P) := (P,V_i)/\mathrm{Grad}(P) > 0$ genau dann, wenn $\pi P \in \overline{C_i}$

(5) $g(P,Q) := (P,Q)/(\mathrm{Grad}(P)\cdot\mathrm{Grad}(Q)) > 0 \iff \pi P = \pi Q$ $(P \neq Q)$.

(6) $(\mathrm{div}(f),V_i) = 0$

(7) $(\mathrm{div}(f),P) = -\log|f(P)|_v \cdot \mathrm{Grad}(P)$ $(f(P) \neq 0,\infty)$.

(8) $\forall Q \in C$, $\forall X \subset C$ affinoid mit $Q \notin X$ ist $P \mapsto g(P,Q)$ auf X beschränkt.

Satz 2: $(\ ,\ )$ ist durch (1)-(8) eindeutig bestimmt.

Satz 3: $(\ ,\ )$ existiert (falls $|\ |_v$ diskret)

c) Potentialtheorie

Sei $X \subset C$ ein "guter" Teilbereich (z.B. $X = U_i$, oder $X = C$).

Das Poissonsche Maß zu $x \in X$ ist $\mu_x = \Sigma h_i(x)\mu_i \in M(\partial C)$ (= $\mathbb{R}$-Vektorraum erzeugt von $\mu_1,\dots,\mu_n$). Es gilt: $\mu_x \geq 1$, $\mu_x(X) = 1$.

Die Jensensche Formel lautet: für f in F gilt:

$$\log|f(x)|_v = -\sum_{\substack{y\in X\\ y\neq x}} g(x,y)v_y(f)\mathrm{Grad}(y) + \int \log|f|_v \, d\mu_x \quad .$$

Eine subharmonische Funktion ist eine Funktion $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit:

a) $\varphi \in L^1(\partial C)$

b) $\varphi(x) \leq \int \varphi(y)\, d\mu_x(y)$

(Man hat Maximumsprinzip, Dirichletsches Randwertproblem, usw.)

Sei nun $z \in X$, und betrachte den Potenzialkern:

$$\delta_z(x,y) := \lambda_k(x,y) - \lambda_k(x,z) - \lambda_k(y,z) ,$$

wobei $\lambda_k(x,y) = g(x,y) - \sum_{i,j} b_{ij}^{(k)} h_i(x) h_j(y)$ und $\sum a_{ir} b_{rj}^{(k)} = \delta_{ij} \quad (i,j \neq k), b_{ki}^{(k)} = b_{ik}^{(k)} = 0$.

Für $\mu \in M(\partial C)$ setze $p_\mu(x) = \int \delta_z(x,y)\, d\mu(y)$ (Potenzialfunktion)

$I(\mu) = \int p_\mu(x)\, d\mu$ (Energie)

<u>Satz 4:</u> ("Energieprinzip") Die quadratische Form $\mu \mapsto I(\mu)$ ist auf $M^0(\partial C) := \{\mu \in M(\partial C) \mid \mu(X) = 0\}$ positiv definiert.

<u>Satz 5:</u> Das Poissonsche Maß μ_z ist das Gleichgewichtsmaß zu δ_z, d.h. $I(\mu_z) < I(\mu)$, $\forall \mu \in M(\partial C)$ mit $\mu(X) = 1$, $\mu_z \neq \mu$.
Außerdem ist g die Greensche Funktion zu δ_z, d.h.
$p_{\mu_z}(x) = I(\mu_z) - g(x,z)$.

<u>Bemerkung.</u> Man kann zeigen, daß g mit der Greenschen Funktion von D. Cantor (Crelle, 1980) und R. Rumely (ms. 1984) übereinstimmt.

Winfried KOHNEN

<u>Heegner points, Heegner cycles and automorphic forms</u>

(This was report on a joint work with D. Gross and D. Zagier)

Let $E|\mathbb{Q}$ be a modular elliptic curve of conductor N with parametrisation $\pi : X_0(N) \to E$. Assume that the L-series $L(E|\mathbb{Q},s)$ has root number -1, and that $\mathrm{ord}_{s=1} L(E|\mathbb{Q},s) = 1$. For integers D and r with $D < 0$, $D \equiv r^2 (4N)$ let $P_{D,r}$ be the sum of the images under π of the Heegner points on $X_0(N)$ determined by the data D and $r \,(\mathrm{mod}\ 2N)$.