E.W. Zink (Berlin)

Darstellungstheorie lokaler Divisionsalgebren

Sei F/Q_p ein p - adischer Zahlkörper und D/F eine zentrale Divisionsalgebra vom Index n. Beschrieben werden die irreduziblen komplexen Darstellungen der multiplikativen Gruppe D^*. Der Formalismus der Darstellungsfilter, angewendet auf die Normalteilerreihe $D^* \supset U \supset U^1 \supset U^2 \supset \ldots$ der Einheiten und Einseinheiten in D, reduziert das Problem auf die Bestimmung von "zulässigen Paaren" (J,π), bestehend aus einer Untergruppe $J \subset D^*$ und einer irreduziblen Darstellung $\pi \in \hat{J}$. Die zulässigen Paare sind kanonische Objekte. Durch Induktion erhält man aus ihnen sämtliche irreduziblen Darstellungen von D^*, und zwei Paare führen auf dieselbe Darstellung genau dann, wenn sie konjugiert sind. Die Gruppen J, welche in den Paaren auftreten, erhält man in der Form $J = J_\beta$ mit $\beta \in D/O$, wobei O der Bewertungsring in D ist, d.h. man hat ein kanonisches Verfahren, um zu jeder Restklasse β eine Gruppe J_β und darüber hinaus eine Untergruppe $H^1_\beta \subset J^1_\beta := J_\beta \cap U^1$ zu definieren. Zu bestimmen sind dann noch die in den zulässigen Paaren auftretenden Darstellungen π, und das läßt sich auf die Konstruktion geeigneter Charaktere $\Theta_\beta : H^1_\beta \to \mathbb{C}^*$ zu jedem $\beta \in D/O$ reduzieren. Im Gegensatz zu H^1_β ist es nicht möglich, der Restklasse β das Θ_β kanonisch zuzuordnen. Kanonisch (nämlich über die Selbstdualität von D^+) gehört zu β ein additiver Charakter ψ_β des Primideals $\mathfrak{P}$ von D, und jede Wahl von $\beta \mapsto \Theta_\beta$ mit der Eigenschaft

$$\beta' \equiv \beta \bmod \mathfrak{P}^{-r}\ (r \geq 1) \text{ impliziert } (\Theta_{\beta'} \cdot \Theta_\beta^{-1})(1+y) = \psi_{\beta'-\beta}(y)$$

$$\text{für } 1+y \in H^1_\beta \cap U^{[r/2]+1} = H^1_{\beta'} \cap U^{[r/2]+1}$$

leistet das Verlangte.

E. Kani (Kingston)

Kurven vom Geschlecht 2 mit elliptischen Differentialen

Es wurden diejenigen Funktionenkörper $F|K$ (algebraisch abgeschlossen) vom Geschlecht 2 konstruiert bzw. klassifiziert, die einen maximal elliptischen Teilkörper (m.e.T.) $F_1 \subset F$ vom Index $N = [F:F_1]$ mit $\mathrm{char}(K) \nmid N$ enthalten. Diese Konstruktion wurde in einer gemeinsamen Arbeit mit G. Frey benutzt, um die Höhenvermutung für elliptische Kurven zu untersuchen; (siehe den nächsten Vortrag).
Hier wurden hauptsächlich Modulprobleme solcher Kurven studiert. Sei dazu $\mathfrak{M}_2^{ell}(N) = \{$ Isomorphieklassen solcher Paare $(F,F_1)\}$. Dann gilt:

<u>Satz 1.</u> $\mathfrak{M}_2^{ell}(N)$ ist durch eine affine, normale, irreduzible Fläche $M_2^{ell}(N)$ repräsentierbar. Genauer ist $M_2^{ell}(N)$ eine offene Untervarietät von $B_{1,1} := (X(N) \times X(N)) / \Gamma_N$, wobei $X(N)$ die affine Modulkurve (der Stufe - N - Struktur) und $\Gamma_N = \{(g, wgw^{-1}) : g \in G\} \subset G \times G$, mit $G = Sl_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) / (\pm 1)$, $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ bezeichnet.

Satz 2. Die Vergißabbildung $\mathfrak{M}_2^{ell}(N) \to \mathfrak{M}_2$ (= Isokl. von Fkp. vom Geschlecht 2) wird durch einen endlichen Morphismus $f_N : M_2^{ell}(N) \to M_2$ repräsentiert, der über die kanonische Involution τ_N auf $M_2^{ell}(N)$ (und $B_{1,1}(N)$) faktorisiert. Ferner ist die induzierte Abbildung

$$\overline{f}_N : \overline{M}_2^{ell}(N) := M_2^{ell}(N)/\tau_N \longrightarrow \overline{M}_2^{ell}(N)^* := f_N(M_2^{ell}(N)) \subset M_2$$

birational, und daher ist $\overline{f}_N$ die Normalisierung von $\overline{M}_2^{ell}(N)^*$.

Satz 1 besagt, daß jedes Paar (F,F_1) wie oben durch ein Tripel (E_1, E_2, ψ) beschrieben wird, wobei E_1, E_2 elliptische Kurven sind und $\psi : E_1[N] \xrightarrow{\sim} E_2[N]$ eine Anti-Isometrie ist; wir nennen dann (E_1, E_2, N) den Typ von (F,F_1). Sei nun zu vorgegebenen (E_1, E_2, ψ):

$$n(E_1, E_2, N) := \#\{(F,F_1) : (F,F_1) \text{ besitzt Typ } (E_1, E_2, N)\}$$

(mit Vielfachheiten gezählt). Es gilt dann der folgende Existenzsatz:

Satz 3. Man hat $\frac{1}{2} N^3 > n(E_1, E_2, N) > \frac{1}{20} N^3$, außer wenn E_1 und E_2 supersingulär sind und $j(E_1), j(E_2) \in \{0, 1728\}$. Es gibt daher, bis auf diese Ausnahmefälle, stets Kurven mit elliptischen Differentialen von vorgegebenem Typ.

Dagegen gibt es auch den folgenden Nichtexistenzsatz:

Satz 4. Sei char(k) = 2 oder 3 und E_1 und E_2 supersingulär. Dann ist $n(E_1, E_2, N) = 0$ für alle Primzahlen N ($\neq$ char(K)).

G. Frey (Essen)

Über Kurven vom Geschlecht 2 , die elliptischen Kurven überlagern, und eine arithmetische Anwendung

Sei C eine reguläre minimale arithmetische Fläche über einem Zahlkörper K . Die Fasern von C seien semistabil, das Geschlecht der allgemeinen Faser sei g und der Führer von C sei N_C. Dann wird für die Selbstschnittzahl der relativen dualisierenden Garbe ω_C vermutet: $\omega_C^2 \le c \deg N_C + d$, wobei c nur von g abhängt und d linear von $\log|s_K|$ und polynomial von $[K:Q]$ und g abhängt. Durch Verwendung der im letzten Vortrag beschriebenen Konstruktion wird gezeigt, daß die Richtigkeit dieser Vermutung für C mit g = 2 die Höhenvermutung für elliptische Kurven impliziert: Sei $E|K$ eine semistablie elliptische Kurve mit Führer N_E . Dann ist ihre Faltingshöhe $h_K(E) \le c_1 \deg N_E + d_1$ mit nur von K abhängigen Zahlen c_1 und d_1 .
Wir hoffen, daß wir mit ähnlichen Überlegungen auch folgende Vermutung angreifen können: Sei $E|K$ eine elliptische Kurve. Dann gibt es nur endlich viele natürliche Zahlen n und elliptische Kurven $E^{(n)}|K$, so daß die n - Torsionspunkte von E und $E^{(n)}$ Galois-isomorph sind.