Die Singularitäten der Humbertflächen

Ernst Kani
Queen's University

Friederich-Alexander-Universität Erlangen
10. Juni 2023

Übersicht

1. Einleitung
2. Die Humbertfläche H_{N^2}
3. Die Normalisierung $\tilde{H}_{N^2}$ von H_{N^2}
4. Modulkurven
5. Die quadratische Form einer Modulkurve
6. Die verfeinerte Humbertinvariante
7. Die Fasern von b_N
8. Die Fasern von $\tilde{\nu}_{N^2}$
9. Modulare Punkte
10. Literatur

1. Einleitung

- Es sei:

K	ein algebraisch-abgeschlossener Körper,
M_2/K	der Modulraum der Geschlecht 2 Kurven C/K, d.h.
$M_2(K)$	besteht aus der Menge der Isomorphieklassen solcher Kurven C/K, und
A_2/K	der Modulraum der hauptpol. abelschen Flächen, d.h.
$A_2(K)$	besteht aus der Menge der Isomorphieklassen der Paare (A, λ), wobei A/K eine abelsche Fläche und $\lambda : A \xrightarrow{\sim} \hat{A}$ eine Hauptpolarisierung ist.

- Bemerkung: Nach Torelli können wir $M_2(K)$ mit einer Teilmenge von $A_2(K)$ identifizieren.
- Humbert (1900): konstruiert (für $K = \mathbb{C}$) zu jeder positiven Zahl $n \equiv 0, 1 \pmod 4$ eine irreduzible Fläche $H_n \subset A_2$, die jetzt eine Humbertfläche genannt wird. Humbert beweist:
  (i) $\mathrm{End}(A) \neq \mathbb{Z} \Leftrightarrow (A, \lambda) \in H_n$, für ein n;
  (ii) $M_2 = A_2 \setminus H_1$;

1. Einleitung – 2

- Bemerkung: Von besonderem Interesse ist der Fall, daß $n = N^2$ ein Quadrat ist, denn dann klassifiziert $M_2 \cap H_{N^2}$ diejenigen Kurven C/K vom Geschlecht 2, die einen (minimalen) Morphismus

$$f : C \longrightarrow E$$

  vom Grad N auf eine geeignete elliptische Kurve E/K besitzen. Im folgenden werden wir nur diesen Fall betrachten.
- Annahme: Im folgenden sei stets $\mathrm{char}(K) \nmid N$, wobei $N \geq 2$ eine ganze Zahl ist.
- In diesem Fall kann man zeigen, daß die Humbertfläche H_{N^2}/K existiert und daß sie eine irreduzible abgeschlossene Teilvarietät von A_2 ist. Außerdem besitzt $H_{N^2} \cap M_2$ die oben genannte Eigenschaft.

1. Einleitung – 3

- Das Ziel dieses Vortrags ist, die Singularitäten der Humbertfläche H_{N^2} weitgehend zu bestimmen.
- Satz 1: Die Humbert Fläche H_{N^2} ist nicht normal.
- Bemerkung: Im Fall, daß $N = 2$ ist, so wurde diese Tatsache in einer Arbeit von Geyer(1974) erwähnt. Ferner bestimmte er den genauen Singularitätenort von H_4. Leider gab er, soweit ich sehen kann, keinen Beweis für seine Aussagen.
- Bezeichnung: Es sei $\tilde{\nu}_{N^2} : \tilde{H}_{N^2} \to H_{N^2}$ die Normalisierung der Humbert Fläche H_{N^2}. Ferner sei

  $$C_{N^2} \;:=\; \mathrm{supp}((\tilde{\nu}_{N^2})_*(\mathcal{O}_{\tilde{H}_{N^2}})/\mathcal{O}_{H_{N^2}})$$

  der Führer (= conductor) der Humbert Fläche. Für $z \in H_{N_2}$ gilt also, daß $z \in C_{N^2} \Leftrightarrow \mathcal{O}_{H_{N^2},z}$ nicht normal ist.

1. Einleitung – 4

- Satz 2: Es sei $\mathrm{char}(K) = 0$ oder $\mathrm{char}(K) > \frac{3}{2}N^2$. Dann besitzt der Führer C_{N^2} mindestens $[\frac{1}{4}N^2]$ irreduzible Kurvenkomponenten.
- Bemerkung: Die Menge

$$U_{N^2} \;:=\; \{z \in H_{N^2} : |\tilde{\nu}_{N^2}^{-1}(z)| \;=\; 1\}$$

der so-genannten unibranch Punkte (EGA) von H_{N^2} ist indirect mit dem Führer C_{N^2} verwandt, denn es gilt, daß das Komplement $U_{N^2}^c = H_{N^2} \setminus U_{N^2}$ im Führer enthalten ist.

- Da C_{N^2} eine abgeschlossene Teilmenge ist, so ist der Abschluß $\overline{U}_{N^2}^c$ von $U_{N^2}^c$ auch in C_{N^2} enthalten; es gilt also

$$\overline{U}_{N^2}^c \;\subset\; C_{N^2}.$$

- Im allgemeinen ist $U_{N^2}^c$ keine abgeschlossene Teilmenge, aber sie ist konstruierbar; vgl. Grothendieck (EGA IV).

1. Einleitung – 5

- Wie wir sehen werden, läßt sich die Menge $\overline{U}^c_{N^2}$ (fast) vollständig durch Modulkurven beschreiben.
- Satz 3: Es sei $\tilde{C}_{N^2}$ die Vereinigung der Modulkurven, die in $\overline{U}^c_{N^2}$ liegen. Ist $\mathrm{char}(K) = 0$, so besteht $\overline{U}^c_{N^2} \setminus \tilde{C}_{N^2}$ aus endlich vielen Punkten. Ferner lassen sich die endlich vielen Modulkurven in $\tilde{C}_{N^2}$ genau angeben.
- Frage: Ist $\tilde{C}_{N^2} = (C_{N^2})^{red}$?
- Bemerkung: Ist $N = 2$, so folgt aus dem Resultat von Geyer, daß dies richtig ist. Ferner ist $\tilde{C}_4 = (C_4)^{red}$ eine irreduzible Modulkurve.

2. Die Humbertfläche H_{N^2}

- Es sei: $X(N)/K$ die affine Modulkurve der Stufe N
  $Y(N) = X(N) \times X(N)$ die Produktfläche,
  $Z_N = \Delta_N^* \backslash Y(N)$ eine "Diagonalquotientenfläche",
  $\Phi_N : Y(N) \to Z_N$ der Quotientenmorphismus.
- Hierbei ist Δ_N^* eine geeignete Untergruppe von $G_N \times G_N$, wobei $G_N = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ auf $X(N)$ operiert.
- Bemerkung: Man kann die Menge $Z_N(K)$ der K-rationalen Punkte von Z_N mit der folgenden Menge $\mathcal{Z}_N(K)$ identifizieren. Hierbei ist

  $$\mathcal{Z}_N(K) \;=\; \{\langle E, E', \psi\rangle\}$$

  die Menge der Isomorphieklassen der Tripel (E, E', ψ), wobei E/K und E'/K elliptische Kurven sind, und $\psi : E[N] \xrightarrow{\sim} E'[N]$ eine Anti-isometrie der N-Torsionspunkte ist.

2. Die Humbertfläche H_{N^2} – 2

- Man kann die obige Definition von $\mathcal{Z}_N(K)$ auf K-Schemata S/K erweitern, und erhält dadurch einen Funktor $\mathcal{Z}_N : \underline{Sch}_{/K} \to \underline{Sets}$.
- Satz 4: Die Fläche Z_N/K ist ein grober Modulraum des Funktors $\mathcal{Z}_N$.
- Satz 5 ([FK]): Es gibt einen endlichen Morphismus $b_N : Z_N \to A_2$, dessen Bild die Humbertfläche H_{N^2} ist. Somit ist H_{N^2} eine irreduzible affine Fläche, die eine abgeschlossene Teilvarietät des Modulraums A_2 ist.
- Bemerkungen: (a) Der Morphismus b_N verkörpert die Grundkonstruktion (basic construction), die in unseren Arbeiten oft benützt wird.
- (b) Im folgenden werden wir stets b_N als einen endlichen, surjectiven Morphismus $b_N : Z_N \to H_{N^2}$ betrachten. (Dies ist ein kleiner Mißbrauch der Bezeichnungen.)

3. Die Normalisierung $\tilde{H}_{N^2}$ von H_{N^2}

- Aus der modularen Beschreibung der Fläche Z_N in Satz 4 folgt, daß es eine eindeutige Involution $\omega_N \in \mathrm{Aut}(Z_N)$ gibt derart, daß

$$\omega_N(\langle E, E', \psi\rangle) \;=\; \langle E', E, \psi^{-1}\rangle,\; \forall \langle E, E', \psi\rangle \in \mathcal{Z}_N(K).$$

- Wir erhalten also einen Quotientenmorphismus

$$\pi_N : Z_N \to Z_N^{sym} := Z_N/\langle \omega_N\rangle.$$

- Satz 6: Der Morphismus $b_N : Z_N \to H_{N^2}$ ist ω_N-invariant. Somit gibt es einen endlichen Morphismus $\nu_N : Z_N^{sym} \to H_{N^2}$ mit der Eigenschaft, daß $b_N = \nu_N \circ \pi_N$.

3. Die Normalisierung $\tilde{H}_{N^2}$ von H_{N^2} – 2

- Satz 7: Der Morphismus ν_N faktorisiert über die Normalisierung $\tilde{\nu}_{N^2} : \tilde{H}_{N^2} \to H_{N^2}$ von H_{N^2}. Es gibt also einen Morphismus $\sigma_N : Z_N^{sym} \to \tilde{H}_{N^2}$ derart, daß $\nu_N = \tilde{\nu}_{N^2} \circ \sigma_N$.
- Ferner ist σ_N ein endlicher, radikaler Morphismus, also ein universeller Homöomorphismus. Insbesondere ist σ_N ein Isomorphismus, wenn $\mathrm{char}(K) = 0$ ist.
- Bemerkung: Wir haben also die folgende Faktorisierung von b_N:

$$Z_N \stackrel{\pi_N}{\longrightarrow} Z_N^{sym} \stackrel{\sigma_N}{\longrightarrow} \tilde{H}_{N^2} \stackrel{\tilde{\nu}_{N2}}{\longrightarrow} H_{N^2}.$$

4. Modulkurven

- Bezeichnung: Es sei $\mathcal{M}_d$ die Menge der primitiven 2×2 Matrizen der Determinante $d \geq 1$. Es ist also

$$\mathcal{M}_d = \Gamma(1)\alpha_d\Gamma(1), \quad \text{mit } \Gamma(1) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \alpha_d = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right).$$

- Resultat (Klein): Ist $d \geq 1$ und $K = \mathbb{C}$, so gibt es zu jedem $\alpha \in \mathcal{M}_d$ eine irreduzible Kurve

$$T_\alpha^N \subset X(N) \times X(N),$$

die nur von der Doppelnebenklasse $\pm\Gamma(N)\alpha\Gamma(N)$ abhängt. Solche Kurven werden Modularkorrespondenzen genannt.

- Ist $\mathrm{char}(K) \nmid d$, so kann man die Modularkorrespondenzen T_α^N auch in positiver Charakteristik konstruieren; s. [MH].

4. Modulkurven – 2

- Satz 8: Es sei $\alpha \in \mathcal{M}_d$, wobei $\mathrm{char}(K) \nmid d$, und sei

$$T_\alpha^{Z_N} := \Phi_N(T_\alpha^N) \subset Z_N$$

das Bild der Modularkorrespondenz T_α^N. Dann ist $T_\alpha^{Z_N}$ eine irreduzible, abgeschlossene Kurve auf Z_N.

- Ferner, ist $\alpha' \in \mathcal{M}_{d'}$, wobei $\mathrm{char}(K) \nmid d'$, so ist

$$T_\alpha^{Z_N} = T_{\alpha'}^{Z_N} \Leftrightarrow d = d' \text{ und } \exists g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : g\beta\alpha' g^{-1} \equiv \pm\beta\alpha(N).$$

Hierbei ist $\beta = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

- Bemerkung: Die Modulkurven $T_\alpha^{Z_N}$ haben eine brauchbare "modulare Interpretation".

4. Modulkurven – 3

- Bezeichnung: Es sei $\alpha \in \mathcal{M}_d$, wobei $\mathrm{char}(K) \nmid d$. Dann sei

  $$T_\alpha^{N,sym} := \pi_N(T_\alpha^{Z_N}) \subset Z_N^{sym}$$

  das Bild der Modulkurve $T_\alpha^{Z_N}$ unter π_N, und sei

  $$\tilde{T}_\alpha^N := \sigma_N(T_\alpha^{N,sym}) \subset \tilde{H}_{N^2}$$

  das Bild der Modulkurve $T_\alpha^{N,sym}$ unter σ_N. Ferner sei

  $$\overline{T}_\alpha^N := b_N(T_\alpha^{Z_N}) = \tilde{\nu}_{N^2}(\tilde{T}_\alpha^N) \subset H_{N^2}.$$

- Satz 9: Die Regel $T_\alpha^{Z_N} \mapsto \tilde{T}_\alpha^N$ bildet die Modulkurven auf Z_N bijektiv auf die von $\tilde{H}_{N^2}$ ab. Es gilt also:

  $$T_\alpha^{Z_N} = T_{\alpha'}^{Z_N} \Leftrightarrow T_\alpha^{N,sym} = T_{\alpha'}^{N,sym} \Leftrightarrow \tilde{T}_\alpha^N = \tilde{T}_{\alpha'}^N.$$

- Bemerkung: Dagegen ist die Abbildung $\tilde{T}_\alpha^N \mapsto \overline{T}_\alpha^N$ i.a. nicht injektiv.

5. Die quadratische Form einer Modulkurve

- Um die Modulkurven besser handhaben zu können, ist es zweckmäßig, jeder Modulkurve $T_\alpha^{Z_N}$ eine positive, binäre quadratische Form q_α^N zuzuordnen. Jede solche quadratische Form liegt in der folgenden Menge $Q(N^2)$.
- Bezeichnung: Sei $q = [a, b, c]$ die binäre quadratische Form

$$q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2,$$

und sei $Q(N^2)$ die Menge der positiven Formen $q = [a, b, c]$ mit $a, b, c \in \mathbb{Z}$, die die folgenden Eigenschaften besitzen:

- (i) $q \to N^2$, d.h., $\exists x, y \in \mathbb{Z},\ \mathrm{ggT}(x, y) = 1$ mit $q(x, y) = N^2$;
- (ii) $q(x, y) \equiv 0, 1 \pmod 4$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$.
- Ist $m|N$ und $d \geq 1$, so sei $Q(N, m, d)$ die Teilmenge der $q \in Q(N^2)$ mit

$$\mathrm{disc}(q) = -16m^2d, \text{ und } \mathrm{ggT}(N/m, d) = 1.$$

5. Die quadratische Form einer Modulkurve – 2

- Lemma 1: Ist $q \in Q(N^2)$, so gibt es ein $m|N$ derart, daß

$$\mathrm{ggT}(16N^2, |\,\mathrm{disc}(q)|) = 16m^2.$$

- Somit ist $Q(N^2)$ ist die disjunkte Vereinigung der Teilmengen $Q(N, m, d)$, wobei $d \geq 1$, $m|N$ und $\mathrm{ggT}(N/m, d) = 1$.
- Bezeichnung: Ist $\alpha \in \mathcal{M}_d$ und $d \geq 1$, so sei

$$q_\alpha^N \;:=\; [N^2, 2mt, m^2(t^2 + 4d)/N^2].$$

Hierbei ist $t = \mathrm{Spur}(\beta\alpha)$, wobei $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, und die Zahl $m|N$ ist durch folgende Formel bestimmt:

$$\frac{N}{m} = \mathrm{ggT}(x - w, y, z, N), \quad \text{falls } \beta\alpha = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right).$$

5. Die quadratische Form einer Modulkurve – 3

- Bemerkung: Bekanntlich operiert die Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ (von rechts) auf der Menge der binären quadratischen Formen.
- Es ist leicht zu sehen, daß die Teilmengen $Q(N, m, d)$ und $Q(N^2)$ unter dieser Operation stabil sind.
- Zwei Formen q_1, q_2 heißen äquivalent $(q_1 \sim q_2)$, falls $q_2 = q_1\gamma$ ist, für ein $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.
- Lemma 2: Es ist $q_\alpha^N \in Q(N, m, d)$, wenn $\alpha \in \mathcal{M}_d$.
- Ist $\mathrm{char}(K) \nmid d$, so gilt ferner, daß

$$T_\alpha^{Z_N} = T_{\alpha'}^{Z_N} \quad \Rightarrow \quad q_\alpha^N \sim q_{\alpha'}^N, \quad \forall \alpha' \in \mathcal{M}_d.$$

5. Die quadratische Form einer Modulkurve – 4

- Bezeichnung: Sei $\mathrm{char}(K) \nmid d$ und $q \in Q(N, m, d)$. Dann sei

$$\mathcal{T}_N(q) := \{T_\alpha^{Z_N} : \alpha \in \mathcal{M}_d, q_\alpha^N \sim q\} \text{ und } \mathcal{H}_N(q) := \bigcup_{T \in \mathcal{T}_N(q)} T.$$

- Satz 9: Ist $q \in Q(N, m, d)$, wobei $\mathrm{char}(K) \nmid d$, so ist $\mathcal{T}_N(q)$ eine nicht-leere, endliche Menge von Modulkurven, und daher ist $\mathcal{H}_N(q)$ eine äquidimensionale Kurve auf Z_N.
- Bemerkung: Man kann die Anzahl $|\mathcal{T}_N(q)|$ der irreduziblen Komponenten von $\mathcal{H}_N(q)$ genau bestimmen; vgl. [MH], Theorem 6.16.

6. Die verfeinerte Humbertinvariante

- Die Humbertfläche $H_n \subset A_2$ wird mithilfe der klassischen Humbertinvariante definiert.
- Indem man diese Idee verallgemeinert, kann man auch gewisse Kurven im Modulraum definieren. Dazu wird die verfeinerte Humbertinvariante benötigt.
- Bezeichnung: Es sei (A, λ) eine hauptpolarisierte abelsche Fläche. Dann ist $\lambda = \phi_\theta$, für eine Divisorklasse $\theta \in \mathrm{NS}(A) = \mathrm{Div}(A)/\equiv$ der Néron-Severi Gruppe. Setze

$$\tilde{q}_{(A,\lambda)}(D) = (D.\theta)^2 - 2(D.D), \quad \forall D \in \mathrm{NS}(A).$$

- Es ist leicht zu sehen, daß $\tilde{q}_{(A,\lambda)}$ eine quadratische Form $q_{(A,\lambda)}$ auf der Quotientengruppe

$$\mathrm{NS}(A, \lambda) \ := \ \mathrm{NS}(A)/\mathbb{Z}\theta$$

induziert. Ferner folgt aus dem Hodgeschen Index Satz, daß $q_{(A,\lambda)}$ positiv-definit ist.

6. Die verfeinerte Humbertinvariante - 2

- Definition: Der quadratische Modul $(\mathrm{NS}(A,\lambda), q_{(A,\lambda)})$ heißt die *verfeinerte Humbertinvariante* von (A,λ).
- Definition: Es seien (M_1, q_1) und (M_2, q_2) zwei quadratische Moduln. Dann wird (M_2, q_2) *primitiv durch* (M_1, q_1) *repräsentiert*, falls es eine Injektion $f : M_2 \to M_1$ gibt derart, daß

  $$q_1 \circ f = q_2 \quad \text{und} \quad M_1/f(M_2) \text{ torsionsfrei ist.}$$

  Ist dies der Fall, so schreibt man $q_1 \to q_2$.
- Wenn f außerdem noch ein Isomorphismus ist, so heißen q_1 und q_2 äquivalent. (Bezeichnung: $q_1 \sim q_2$).
- Bemerkung: Ist $(A,\lambda) \simeq (A',\lambda')$, so ist $q_{(A,\lambda)} \sim q_{(A',\lambda')}$.
- Somit bestimmt die Isomorphieklasse $\langle A,\lambda\rangle \in A_2(K)$ eine Äquivalenzklasse von quadratischen Formen.

6. Die verfeinerte Humbertinvariante - 3

- Bezeichnung: Ist q eine quadratische Form (auf $\mathbb{Z}^r$), so sei
$$H(q) := \{(A,\lambda) \in A_2(K) : q_{(A,\lambda)} \to q\}.$$
- Bemerkung: Die Teilmengen $H(q)$ können als Verallgemeinerungen der Humbertflächen H_n betrachtet werden, denn es gilt
$$H_n = H(nx^2).$$
- Satz 10: Es sei $q \in Q(N,m,d)$, wobei $\mathrm{char}(K) \nmid d$. Dann ist
$$b_N(\mathcal{H}_N(q)) = H(q),$$
also ist $H(q)$ eine abgeschlossene, äquidimensionale Kurve auf H_{N^2}. Die Menge der irreduziblen Komponenten von $H(q)$ ist
$$\overline{\mathcal{T}}_N(q) \ := \ b_N(\mathcal{T}_N(q)) \ = \ \{\overline{T}_\alpha^N : \alpha \in \mathcal{M}_d, q_\alpha^N \sim q\}.$$
- Bemerkung: Es kann passieren, daß$|\overline{\mathcal{T}}_N(q)| < |\mathcal{T}_N(q)|$ ist. In diesem Fall ist $H(q)$ im Führer C_{N^2} enthalten, wie wir sehen werden.

7. Die Fasern von b_N

- Um die Mengen U_{N^2} und $U^c_{N^2}$ zu studieren, ist es notwendig, die Anzahl der Punkte in den Fasern von $\tilde{\nu}_{N^2}$ zu kennen.
- Als ersten Schritt hierzu untersuchen wir die Anzahl der Punkte in den Fasern von b_N.
- Bezeichnungen: Für $r \geq 1$ sei

$$H^{(r)}_{N^2}(K) \; := \; \{\langle A, \lambda\rangle \in H_{N^2}(K) : \mathrm{Rang}(\mathrm{NS}(A,\lambda)) = r\}.$$

  Insbesondere, ist $\langle A, \lambda\rangle \in H^{(2)}_{N^2}(K)$, so ist $q_{(A,\lambda)} \sim q \in Q(N^2)$.
- Ferner, ist q eine quadratische Form auf $\mathbb{Z}^r$, und ist $n \in \mathbb{Z}$, so bezeichne

$$P_n(q) \; := \; \{\vec{x} \in \mathbb{Z}^r : \mathrm{ggT}(\vec{x}) = 1, q(\vec{x}) = n\}$$

  die Menge der primitiven Darstellungen von n durch q.

7. Die Fasern von $b_N - 2$

- Satz 11: Es sei $\langle A, \lambda \rangle \in H_{N^2}^{(2)}(K)$ und sei $q \sim q_{(A,\lambda)}$. Ist $N \geq 3$, so gilt

$$|b_N^{-1}(\langle A, \lambda \rangle)| = \frac{1}{a(q)} |P_{N^2}(q)|,$$

wobei $a(q) \leq 6$ nur von der Form q anbhängt. Explizit ist

$$a(q) \; = \; \mathrm{Max}(1, |P_1(q)|) \cdot \mathrm{Max}(1, |P_4(q)|).$$

- Bemerkung: Ist $(A, \lambda) \simeq (J_C, \lambda_C)$ die Jacobische einer Kurve C/K vom Geschlecht 2, so ist $a(q) = \frac{1}{2} |\operatorname{Aut}(C)|$.

8. Die Fasern von $\tilde{\nu}_{N^2}$

- Um die Anzahl der Punkte in den Fasern der Normalisierung $\tilde{\nu}_{N^2}$ zu bestimmen, werden wir Satz 11 benützen. Dazu benötigen wir aber auch noch eine Kenntnis der Fixpunkte der Involution ω_N auf Z_N.
- Satz 12: Es sei $\mathcal{F}_N$ die Menge der Fixpunkte der Involution ω_N auf Z_N. Fernei sei

$$\mathcal{F}_N^* = \mathcal{H}_N(q_1) \cup \mathcal{H}_N(q_2) \cup \mathcal{H}_N(q_3) \cup \mathcal{H}_N(q_4) \cup \mathcal{H}_N(q_5),$$

  wobei $q_1 := [4, 0, N^2], q_2 := [1, 0, N^2], q_3 := [4, 4, \frac{N^2}{4} + 1],$ $q_4 := [1, 0, 4]$ und $q_5 := [4, 0, 4]$. (Hierbei gelte die Vereinbarung, daß $\mathcal{H}_N(q_i) = \emptyset$, wenn $q_i \notin Q(N^2)$.) Dann ist

$$\mathcal{F}_N^* \subset \mathcal{F}_N \quad \text{und} \quad |\mathcal{F}_N \setminus \mathcal{F}_N^*| < \infty.$$

- Bemerkung: Wenn entweder $2|N$ oder wenn es einen Primdivisor $p|N$ mit $p \equiv 5, 7 \pmod 8$ gibt, so gilt $\mathcal{F}_N^* = \mathcal{F}_N$.

8. Die Fasern von $\tilde{\nu}_{N^2} - 2$

- Bezeichnung: Es sei $q \in Q(N^2)$. Ist $N \geq 3$, so sei

$$d_N(q) = \frac{|P_{N^2}(q)|}{\tilde{\mu}_N(q)},$$

wobei

$$\tilde{\mu}_N(q) = \begin{cases} 2, & \text{wenn } |P_1(q)| = |P_4(q)| = 0 \text{ ist, oder} \\ & \text{wenn } q \sim [1, 0, N^2], [4, 0, N^2] \text{ oder } [4, 4, \frac{N^2}{4} + 1], \\ 12, & \text{wenn } q \sim [4, 4, 4], \\ 4, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Ist $N = 2$, so sei $d_2(q) = \begin{cases} 2, & \text{wenn } q \sim [4, 0, 4], \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$

- Satz 13: Es sei $\langle A, \lambda \rangle \in H_{N^2}^{(2)}(K)$, und sei $q_{(A,\lambda)} \sim q \in Q(N^2)$. Dann gilt:

$$|\tilde{\nu}_N^{-1}(\langle A, \lambda \rangle)| \;=\; d_N(q).$$

8. Die Fasern von $\tilde{\nu}_{N^2} - 3$

- Bemerkung: Für $N \geq 3$ folgt Satz 13 aus den Sätzen 11 und 12 mithilfe einer längeren Fallunterscheidung. Aber im Fall $N = 2$ werden hierzu neue Methoden benötigt.
- Satz 14: Die Menge

$$\tilde{Q}(N^2) \; := \; \{q \in Q(N^2) : d_N(q) > 1\}$$

besteht aus endlich vielen Äquivalenzklassen von Formen.
- Ist $\operatorname{char}(K) = 0$ oder $\operatorname{char}(K) > \frac{1}{4}N^2$, so ist

$$\tilde{C}_{N^2} \; := \; \bigcup_{q \in \tilde{Q}(N^2)} H(q)$$

eine abgeschlossene Menge, die im Führer C_{N^2} enthalten ist.

8. Die Fasern von $\tilde{\nu}_{N^2} - 4$

- Bemerkung: Man kann die (Äquivalenzklassen der) Formen in $\tilde{Q}(N^2)$ für eine gegebene Zahl N explizit ausrechnen.
- Allerdings ist die Liste recht lang, denn sie enthält die folgende Teilmenge, die aus $[\frac{1}{4}N^2]$ Äquivalenzklassen besteht:

$$\tilde{Q}(N^2)^* := \{q \sim [N^2, 2M, N^2] : 0 \leq M < \tfrac{1}{2}N^2, M \equiv N(2)\}.$$

- Beispiel: Es sei $\tilde{c}_N$ die Anzahl der Äquivalenzklassen der Formen in $\tilde{Q}(N^2)$. Dann haben wir die folgende Tabelle:

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\tilde{c}_N$	1	3	8	16	23	38	49	71	85	113	132	166	185

9. Modulare Punkte

- Definition: Ein Punkt $z \in H_{N^2}(K)$ heiße *modular*, wenn $z \in H(q)$ ist, für ein $q \in Q(N^2)$.
- Die Menge aller modularen Punkte auf H_{N^2} ist also

$$\mathfrak{M}_{N^2} := \bigcup_{q \in Q(N^2)} H(q).$$

- Ab jetzt sei $\mathrm{char}(K) = 0$.
- Satz 15: Sei $\mathcal{M}_* := \bigcup_{d \geq 1} \mathcal{M}_d$. Dann ist

$$\mathfrak{M}_{N^2} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{M}_*} \overline{T}_\alpha^N(K),$$

und daher ist $\mathfrak{M}_{N^2}$ eine ind-konstruierbare Menge (im Sinne von EGA).

9. Modulare Punkte – 2

- Korollar: Es sei $E \subset H_{N^2}(K)$ eine konstruierbare Teilmenge. Ist $E \subset \mathfrak{M}_{N^2}$, so gibt es endlich viele $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathcal{M}_*$ derart, daß
$$E \subset \overline{T}^N_{\alpha_1} \cup \ldots \cup \overline{T}^N_{\alpha_r}.$$
- Insbesondere, ist C eine irreduzible abgeschlossene Kurve auf H_{N^2} mit der Eigenschaft, daß $E = C(K) \cap \mathfrak{M}_{N^2}$ eine unendliche, konstruierbare Menge ist, so ist $C = \overline{T}^N_{\alpha}$, für ein $\alpha \in \mathcal{M}_*$.
- Satz 16: Jede Kurvenkomponente C von $\overline{U}^c_{N^2}$ ist modular, d.h., $C = \overline{T}^N_{\alpha}$, für ein $\alpha \in \mathcal{M}_*$.
- Bemerkung: Damit ist Satz 3 bewiesen.

9. Modulare Punkte – 3

- Bemerkung: Es ist leicht zu sehen, dass

$$\mathfrak{M}_{N^2} \;=\; H^{(2)}_{N^2}(K) \cup H^{(3)}_{N^2}(K).$$

- Man beachte, daß $H^{(3)}_{N^2}(K)$ die Menge der CM-Punkte auf H_{N^2} ist.
- Aus dem Satz von Pila[Pi] (2011) (Beweis der André-Oort Vermutung) folgt also, daß wenn C eine irreduzible, abgeschlossene Kurve auf H_{N^2} ist, so gilt

$$|C(K) \cap H^{(3)}_{N^2}(K)| = \infty \quad \Rightarrow \quad C = \overline{T}^N_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{M}_*.$$

- Frage: Ist dies auch richtig, wenn man "CM-Punkte" durch "modulare Punkte" ersetzt? Mit anderen Worten, wenn C eine irreduzible abgeschlossene Kurve auf H_{N^2} ist, gilt

$$|C(K) \cap \mathfrak{M}_{N^2}| = \infty \quad \Rightarrow \quad C = \overline{T}^N_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{M}_*?$$

10. Literatur

[FK] G. Frey, E.K., Curves of genus 2 and associated Hurwitz spaces. *Contemp. Math.* **487** (2009), 33–81.

[Ge] W.-D. Geyer, Invarianten binärer Formen. *Springer Lecture Notes in Math.* **412** (1974), 36–69.

[MH] E. Kani, Modular curves on Humbert Surfaces and on their normalization. Preprint, 77 pages.

[Pi] J. Pila, O-minimality and the André-Oort Conjecture for $\mathbb{C}^n$. *Ann. Math.* **173** (2011), 1779–1840.