GCB140 – Statistiques en ingénierie

Chapitre 3

Nasser Sadeghkhani[1]

[1]a.sadeghkhani@usherbrooke.ca

Janvier 2017

Outline

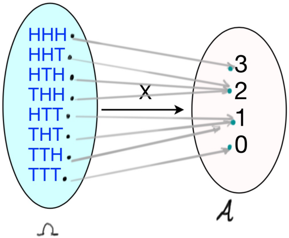
Variable Aléatoire

Une variable aléatoire (v.a.) X, est une fonction de Ω dans A, $(X : \Omega \to A \subseteq \mathbb{R})$.

Exemple 1

Soit X nombre de "FACE" en lancer de 3 pièce de monnaie.

1. Trouver le support de X.
2. Trouver la distribution de X.
3. Trouver la fonction de masse de X.



Solution :

$$A = \{0; 1; 2; 3\}$$

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$P(X = x) = \frac{\binom{3}{x}}{8}; \quad x = 0; 1; 2; 3.$$

Remarque : Une fonction de masse n'est pas nécessairement symétrique comme ici.

Exemple 2

Si X est nombre de la répétition du lancer d'une pièce de monnaie jusqu'à obtenir une pile ou trois faces consécutives, trouver la distribution de X.

Soution :

x	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Définition 3 (Fonction de masse)

La fonction de masse $P(X = x)$ (ou $P(x)$) d'une v.a. discrète X est une fonction qui fait correspondre à chaque valeur x de la v.a. X, la probabilité que X prenne la valeur x.
Avec les propriétés : (i) $P(X = x) \geq 0$; (ii) $\sum_x P(X = x) = 1$.

Définition 4 (Fonction de répartition)

$$F(X = a) = P(X \leq a); \quad a \in \mathbb{R}.$$

Exemple 5

A l'Exemple 2,

a) $F(-1) = ?$

b) $F(2.7) = ?$

c) $F(x) = ?$

Exercice 1

On jette deux dés distincts, Soit X la somme des résultats. Trouver :
(i) la fonction de masse, (ii) $P(X \leq 6)$, (iii) $P(5 < X \leq 9)$.

Définition 6 (Fonction de densité)

$f(x)$ est une fonction de densité de v.a. continue, lorsque :

1. $f(x) > 0$;
2. $\int_{x} f(x)\,dx = 1$.

Remarque

1) $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$,
2) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$;
3) $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$.
4) Si X est continue, alors :
$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$

Exemple 7

La durée de vie d'un ordinateur portable exprimée en années est une variable aléatoire T suivant la loi (densité) $f(t) = 0.125 \exp\{-0.125t\}$, pour $t > 0$. Quelle est la probabilité de

a) La probabilité que la durée de vie de cet ordinateur portable dépasse 5 ans.

b) La probabilité que la durée de vie de cet ordinateur portable dépasse 5 ans sachant qu'il fonctionne depuis déjà 2 ans.

Distributions conjointes

Comment généraliser les fonctions de probabilité et de densité à plus d'une v.a. ?

v.a. discrètes :

Exemple 8

Excercice 2

On tire 2 boules sans remise d'une urne qui contient 8 Rouge, 6 Bleue e
Verte. Soit X : le nombre de boules Rouge et Y : le nombre de boules Bleue. Trouver la distribution conjointe de X et Y.

Distributions marginales

v.a. discrète :

$\sum_x \sum_y P(X = x; Y = y) = 1$

la distribution marginale de X : $P(X = x) = \sum_y P(X = x; Y = y)$,

la distribution marginale de Y : $P(Y = y) = \sum_x P(X = x; Y = y)$.

v.a. continue :

$\int_x \int_y f(x; y)\, dx\, dy = 1$

la distribution marginale de y : $f(x) = \int_y f(x; y)\, dy$,

la distribution marginale de X : $f(y) = \int_x f(x; y)\, dx$,

$F(a; b) = \int_{-\infty}^{a} \int_{-\infty}^{b} f(x; y)\, dx\, dy.$

$\frac{d^2 F(x;y)}{dx\, dy} = f(x; y).$

Excercice 3

Définition 9 (Indépendance)

Si X est indépendant de Y, alors :

Discrètes : $P(X = x; Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$.

Continues : $f(x; y) = f(x)f(y)$.

Définition 10 (Probabilité conditionnelle)

Discrète : $P(X = x|Y = y) = \frac{P(X=x;Y=y)}{P(Y=y)}$,

Continue : $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x;y)}{f(y)}$.